

MODIFICATION DE TRACÉ PAR LA MÉTHODE DES FLÈCHES

Version 03

Édition du 12 avril 2017



Sommaire

1	DD É		_
1		AMBULE	
2		ET	
3		IAINE D'APPLICATION	
4		IPEMENTS, DOCUMENTS ASSOCIÉS	
5		INITIONS, TERMINOLOGIE	
6		ÉRALITÉS	
6.	1 Ra	appels historiques	6
	6.1.1	Problématique de l'époque.	<i>6</i>
6.	2 De	escription	7
	6.2.1	Choix de la longueur de la corde	7
7	FLÈC	CHES ET COURBURE	8
7.	1 Co	ourbure	8
	7.1.1	Équation de la courbure	8
7.	2 No	otion d'osculation	9
7.		alcul de la flèche	
	3 Ci 7.3.1	Connaissant le rayon	
		·	
7.		Evers pratiques ou prescrits	
	7.4.1	Coefficient C	
	7.4.2	C est les variations d'insuffisance et de dévers	
8		ICIPE DE LA MÉTHODE DES FLÈCHES	
8.	1 Di	agrammes des flèches	
	8.1.1	Diagramme d'un arc de cercle	
	8.1.2	Diagramme d'un cercle tangent à un alignement au droit d'un piquet	16
	8.1.3	Diagramme d'un arc de cercle sécant à un alignement au droit d'un piquet	16
	8.1.4	Diagramme d'un arc de cercle tangent à un alignement en un point ne correspondant pas à un	1.7
		Diagramma das flàshas d'un respondement progressif. Elèshas de transition	
	8.1.5	Diagramme des flèches d'un raccordement progressif - Flèches de transition	
8.		opriété de la méthode	
	8.2.1	Conséquences du déplacement d'un point de la courbe.	
	8.2.2	Propriétés d'une courbe rectifiée par rapport à la courbe initiale	
	8.2.3	Relation entre la flèche et l'angle formé par les alignements tangents à la courbe à ses extrémit	
	8.2.4	Changement d'orientation à l'extrémité d'une courbe	
	8.2.5	Conséquences	21
	8.2.6	Corollaire	21
	8.2.7	Détermination approximative de l'ordonnée d'un point d'une courbe définie par son diagramm	
	des flè	ches	22

8.2.8	Application des propriétés des diagrammes des flèches à l'étude des rectifications des courbes.	.25
8.2.9	Exemples de cas pratiques	27
8.3 L	es doucines	31
8.3.1	Normes à respecter dans les doucines	31
8.3.2	Exemples numériques	34
8.3.3 (1983)	Considérations théoriques sur les doucines, études des raccordements de M. Henri PERROT	36
8.3.4	Introduction de doucines en conservant la rampe de flèche :	38
9 CON	APLÉMENTS	38
9.1 A	mélioration de la trajectoire du centre de gravité en courbe	38
9.1.1	Principe	39
9.1.2	Méthode	.39
9.1.3	Exemple de calcul	40
9.2 D	édoublement de voie	41
9.2.1	Principes	41
9.2.2	Méthode	.41
9.2.3	Exemple numérique	43
9.3 R	estitution en plan (coordonnées x, y)	45
9.3.1	Calcul des coordonnées	
10 CO	NSÉQUENCES SUR LES ZONES EN LRS	48
10.1	Influence des flèches et des ripages	48
	Analyse mathématique	
	XE 1	
Écart	entre la flèche est sa valeur par la formule approchée	50
	XE 2	
	ion & de la longueur de la corde en fonction du rayon pour une équidistance de piquet de 10	
	ion o de la longueur de la corde en lonesion du ruyon pour une equidistance de piquet de ro	
ANNEX	XE 3	52
Sapin	(valeurs normales)	52
Sapin	(valeurs exceptionnelles)	53
•	XE 4	
Positio	on de la flèche quelconque sur la corde	54
		55

1 Préambule

Plusieurs documents traitent de la rectification des courbes par la méthode des flèches. Il était intéressant d'en faire une synthèse, adaptée au métier d'études, dans un recueil unique pour la formation des jeunes projeteurs d'autant que l'avènement du dessin assisté par ordinateur tend à faire oublier cette méthode pourtant indispensable pour maîtriser les ripages de voie et correspondant à la mise en place de celle-ci par le bourrage mécanique lourd.

2 Objet

Ce didacticiel présente la rectification de tracé par la méthode des flèches.

3 Domaine d'application

Ce didacticiel s'adresse aux projeteurs susceptibles de pratiquer le tracé de voie calculé.

4 Équipements, documents associés

Informatique:

Autocad 2000 et EPURE (Ensemble de programmes à l'usage des réseaux d'études) et la norme DAO associée.

Matériel:

- Équerre, kutch, rapporteur
- Calculatrices, tables trigonométriques
- Théodolite, chaîne (50 m)

5 Définitions, terminologie

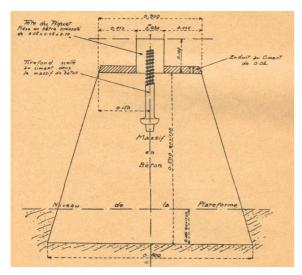
Flèches correspondant à une courbure.

a	longueur curviligne	\mathbf{g}	Accélération due à la pesanteur, 9,81 m/s ² .
C	Coefficient de dévers.	I	Insuffisance de dévers.
D	Dévers d'équilibre aussi dévers théorique (d_{th})	Kutch	Règle graduée souvent à échelles multiples
$\mathbf{d}_{\mathbf{p}}$	Dévers pratique (en voie)		(nom de fabriquant)
E	Excès de dévers.	INGA	Groupe Ingénierie Aménagements.
e	Distance entre les cercles de roulement d'un	R	Rayon de courbe en plan.
·	même essieu.	Rcyl	Rayon de raccordement dans le plan vertical.
ec	écartement des rails (bords intérieurs)	RP	Raccordement progressif.
\mathbf{e}_{V}	entre-voie, distance entre bords extérieurs des rails.	V	Vitesse en km/h

6 Généralités

6.1 Rappels historiques

6.1.1 Problématique de l'époque





Les courbes des chemins de fer se tracent sur le terrain en mesurant, des abscisses et des ordonnées sur le prolongement des alignements qui relient celles-ci entre elles.

L'extrémité de chacune des ordonnées, déterminant un point de la courbe, est matérialisée sur le terrain par un piquet.

Cette méthode est d'une exactitude suffisante pour l'exécution des terrassements, mais elle manque de précision pour donner, aux files de rails, la régularité de courbure indispensable à la circulation des trains, aux grandes vitesses. Elle ne permet pas, en effet, d'éviter des irrégularités de courbure qui provoquent des chocs préjudiciables au matériel fixe, au matériel roulant et au confort des voyageurs.

Or, à la construction, les axes des alignements, qui servent aux tracés des courbes, sont bien déterminés, les caractéristiques de ces dernières (longueur des tangentes, angle au sommet) peuvent être mesurées calculées assez exactement et les chaînages se font, avec précision, sur des plateformes convenablement dressées ; on devrait donc obtenir le ,maximum de précision, et le résultat n'est bien souvent que passable, Sur les voies exploitées, les alignements droits figurés par les rails, qui précèdent et suivent les courbes, sont plus ou moins déformés après quelques années de trafic et ne permettent plus de mesurer exactement l'angle au sommet.

Ce dernier est souvent devenu inaccessible par suite des constructions édifiées depuis l'ouverture de la ligne.

Les chaînages des tangentes et sous-tangentes devant se faire sur la voie ballastée ou dans les talus de remblai et de déblai, n'offrent plus aucune précision.

Un tracé, effectué dans ces conditions, n'est même plus passable, il est mauvais. On peut affirmer que, généralement, il est impossible de retracer correctement une courbe de Chemin de fer exploité.

Les Ingénieurs de travaux de chemin de fer furent donc obligés de concevoir de nouveaux procédés qu'ils basèrent sur la mesure et la correction des flèches (distance entre la courbe et sa corde; proportionnelle à la courbure) d'un tracé existant.

M. Lefort, ancien Ingénieur principal, Chef de Service central de la Voie au Chemin de fer du Nord, exposa, dans le bulletin de mai 1910 de la Société des Ingénieurs civils de France, et dans la Revue Générale des Chemins de fer de janvier 1911, une méthode qui, trop complexe, hors de la portée des agents d'exécution, ne vécut pas.

Les méthodes actuellement employées sont dues à MM. Dupuy, Henno, Akermann, Triboulloy, Cassan, Saint Amand à M. Hallade ancien Ingénieur principal au Chemin de fer de l'Est.

6.2 Description

La méthode consiste à mesurer les flèches (distance entre la corde et la courbe) au milieu d'un cordeau de 20 mètres (voir § 7.3 Calcul de la flèche page 9) et de corriger celles-ci par ripage de la voie.

La rectification des courbes par la méthode des flèches concerne des modifications de courbure entraînant généralement des ripages peu importants. Elle travaille à longueur de fer constant.

La même méthode peut être avantageusement employée pour réaliser des modifications de tracé. Elle est tout particulièrement indiquée dans les cas délicats (remaniement de voies dans les gares, tracés de zones comportant des appareils) où en particulier, il est nécessaire d'obtenir en des points bien déterminés des rayons de courbure donnés ou des déplacements de voie maîtrisés.

Cette méthode permet :

- De connaître avec plus de précision que par les méthodes topographiques les éléments caractéristiques du tracé existant (rayon - développement) et, après application des déplacements obtenus par la méthode des flèches, ceux du nouveau tracé;
- De calculer exactement les ripages à faire subir à la voie, de déterminer par suite s'il y a des obstacles s'opposant à ces ripages et de modifier le calcul pour les éviter.

L'attention est cependant attirée spécialement sur le fait que de telles modifications entraînent un certain nombre de travaux qui doivent être exécutés avec des précautions qu'il serait dangereux de négliger.

Les ripages importants ou sur une grande longueur peuvent nécessiter une opération d'homogénéisation ou de libération en cas de LRS

Parmi les travaux connexes aux modifications du tracé on peut citer :

- Établissement de plate-forme nouvelle soit totale, soit partielle; dans ce dernier cas surtout le nivellement est à surveiller de très près;
- Modification du dévers, de l'écartement, de l'armement (nombre et emplacement des rails courts à revoir) etc., etc.

Après quelques rappels théoriques, nous allons examiner un certain nombre de cas où une modification profonde de tracé peut être effectuée par la méthode des flèches.

Ces cas ne seront pas traités complètement; la situation existante et la solution du problème seront simplement schématisées par un plan et un diagramme des flèches.

6.2.1 Choix de la longueur de la corde

En principe, on peut prendre la longueur de corde que l'on veut, pourvu que le rapport au rayon soit suffisamment petit, par exemple inférieur ou égal à 0,01. En fait la longueur de corde ne doit pas être assez grande pour que le cordeau utilisé pour mesurer les flèches sur le terrain subisse une déformation sensible sous l'effet de son poids ou du vent. Avec l'ancienne formule PLM (voir page 12) on pouvait prendre une longueur de corde pour que la flèche soit égale au dévers :

$$\frac{c^2}{8R} = \frac{2V}{3R} \Rightarrow c = \frac{4\sqrt{V}}{\sqrt{3}} = 2,3\sqrt{V} = 20,57 \,\text{m} \text{ à 80 km/h si } V = 120 \,\text{km/h} \text{ } c = 2\sqrt{3,2(V-45)} = 30,98 \,\text{m}$$

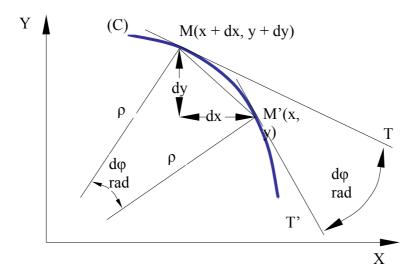
Avec des vitesses supérieures à 80 km/h et les nouveaux modes de calcul du dévers, la longueur de la corde atteindrait 30 m ce qui devient excessif pour les raisons évoquées précédemment, l'expérience a montré qu'une longueur de 20 m est la plus pratique sur le terrain aussi a-t-elle été généralisée à toutes les courbes. Les dévers n'étant plus égaux aux flèches, les nouvelles épures comportent désormais le diagramme des dévers.

7 Flèches et courbure

7.1 Courbure

7.1.1 Équation de la courbure

Figure 1



Soit une courbe (C) définissant les variations de la fonction y = f(x) celle-ci, entre 2 points M et M' infiniment rapprochés, peut être représentée par $\frac{1}{\rho} = d\frac{\varphi}{ds}$

Le coefficient angulaire de la tangente en M de (C) est représenté par le rapport $\frac{dy}{dx} = \tan(\varphi)$

La tangente MT étant la position limite de MM' quand dφ tend vers 0.

Par définition, la limite de ce rapport est appelé dérivée de la fonction f(x) on a donc $tg \varphi = y'$ En effet, la dérivée est la limite du rapport de l'accroissement Δy de la fonction y = f(x) à l'accroissement Δx de la

variable x
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
 quand $\Delta x \rightarrow 0$

D'où la fonction inverse $\varphi = A rctg y'$

La dérivée de la fonction arctg(u) est de la forme $arctg'(u) = \frac{u'}{1+u^2}$ on aura donc $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{y''}{1+y'^2}$

D'autre part quand MM' tend vers 0, l'arc MM' peut être confondu avec la corde MM' on a

$$ds^{2} = dx^{2} + dy^{2} d'où, ds = \sqrt{dx^{2} + dy^{2}} \text{ et } \frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{dx^{2}}{d}x^{2} + \frac{dy^{2}}{d}x^{2}} = \sqrt{1 + y'^{2}} = (1 + y'^{2})^{1/2}$$

donc,
$$\frac{1}{\rho} = \frac{d \varphi}{ds} = \frac{\frac{d \varphi}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{1/2}(1+y'^2)} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

Appliqué au cercle d'équation par rapport à sa tangente $y=R-\sqrt{R^2-x^2}$ (Figure 2 p 9)

$$y' = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \text{ et } y'' = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2}} \times \sqrt{R^2 - x^2}}{R^2} = \frac{R \times (R^2 - x^2)^{-1/2} (R^2 - x^2)^{1/2}}{R^2} = \frac{1}{R}$$

7.2 Notion d'osculation

Deux courbes peuvent être tangentes et présenter au point de tangence des rayons de courbure différents. On dit aussi :

- Qu'elles ont deux points communs confondus (position limite de deux courbes ayant deux points communs M et M' lorsque M' → M). (Par deux points on peut faire passer une infinité de cercles)
- Qu'elles ont une tangente commune (même valeur de la dérivée première au point de contact).



Deux courbes peuvent être non seulement tangentes mais, de plus, présenter au point de tangence le même rayon de courbure. On dit alors :

- Qu'elles sont osculatrices (même valeur des dérivées premières et secondes au point de contact).
- Qu'elles ont trois points communs confondus. Par 3 points, on ne peut faire passer qu'un seul cercle. Il s'agit du cercle osculateur commun aux deux courbes si aucune n'est un cercle, ou l'une des deux courbes qui est alors le cercle osculateur de l'autre, une seule des deux courbes, au maximum pouvant être un cercle.



7.3 Calcul de la flèche

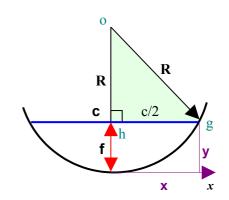
7.3.1 Connaissant le rayon.

$$f_{(mm)} = \frac{50000}{R_{(m)}}$$

Cette formule est en fait une formule dérivée de la formule de calcul approchée de la flèche en fonction du rayon et de la corde c: $.f = \frac{c^2}{8\,R}$ Elle n'est valable que pour une flèche mesurée au centre d'une corde de 20 m. soit $\frac{400}{8\,R} \times 1000 = \frac{50000}{R}$ le coefficient 1000 (m.mm) servant à adapter les mètres et les millimètres pour un résultat en mètre pour le rayon et en millimètre pour la flèche.

La formule exacte de calcul de la flèche est : $f = R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$ (Théorème de Pythagore dans le triangle **ogh** Figure 2)





Pour faciliter les calculs, cette formule a été développée à l'aide du développement limité de $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n + ...$ où $m = \frac{1}{2}$ En mettant R en facteur,

$$f = R\left(1 - \sqrt{1 + \left(-\frac{c^2}{4R^2}\right)}\right)$$

et en se limitant aux 3 premiers termes de la série, on obtient

$$f = R \left[1 - \left[1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{c^2}{4R^2} \right) + \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right)}{2!} \left(-\frac{c^2}{4R^2} \right)^2 \right] \right]$$

puis, après réduction, $f = \frac{c^2}{8R} - \frac{c^4}{128R^3}$

On observe que la formule approchée néglige le terme de quatrième ordre $\frac{c^4}{128 R^3}$. L'erreur commise sur le

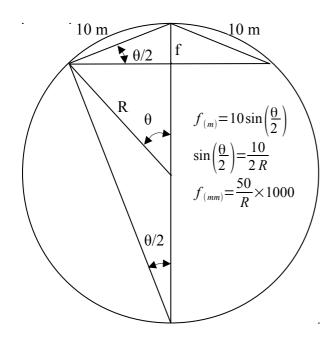
développement limité est inférieure au terme négligé car la série est alternée (terme positif terme négatif) Elle minore la valeur du rayon calculé ce qui va dans le sens de la sécurité. Pour une corde de 20 m ce terme est maximum pour un rayon de 150 m est vaut 0,370 mm ce qui est négligeable (voir ANNEXE 1 p 50)

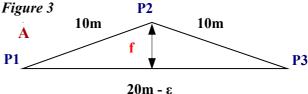
Cette formule est surtout utilisée avec la méthode des flèches (épure Hallade). Elle permet de connaître rapidement la valeur d'un rayon sur le terrain, avec un cordeau et un réglet, de même, sur un plan, avec l'aide d'une seule règle graduée.

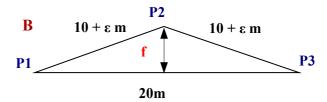
Une ambiguïté subsiste entre une longueur de corde de 20 m effective et un espacement des piquets de courbe de 10 m (Figure 3 p 10)

De fait, les bourreuses mécaniques utilisent une corde de 20 m (Figure 3 B) alors que Lors des relevés manuels sur fer, le marquage est réalisé tous les 10 m (Figure 3 A).

Figure 4







Dans ce cas, la formule $f = \frac{50000}{R}$ est rigoureusement exacte (Figure 4).

Si la flèche n'est pas mesurée au milieu de la corde c, $c = c_1 + c_2$ sa valeur devient :

$$f_{(mm)} = \frac{c_{1(m)} \times c_{2(m)} \times 1000}{2 R_{(m)}}$$

(voir ANNEXE 4 p 54)

On peut appréhender la variation ε de la longueur de la corde C, en fonction du rayon, pour une distance de 10 m entre piquet.

$$f = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{20 - \varepsilon}{2}\right)^2} \implies (R - f)^2 = R^2 - \left(\frac{400 - 40\varepsilon + \varepsilon^2}{4}\right) \implies R^2 - 2Rf + f^2 = R^2 - 100 + 10\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

En négligeant le terme $\frac{\epsilon^2}{4}$, très petit (de l'ordre de 6 10^{-6}) on peut écrire : $\epsilon = \frac{f^2 - 2\,Rf + 100}{10}$ en usant d'une deuxième approximation en remplaçant f par $\frac{c^2}{8\,R}$ $c = 20\,m$, $\epsilon = \frac{c^4}{640\,R^2} - \frac{c^2}{40} + 10$ $\Rightarrow \epsilon = \frac{250}{R^2}$

La variation de ε est représentée ANNEXE 2 page 51.

Pour une valeur de rayon de 150 m, l'écart est maximum :

Soit un relevé sur fer (cordeau de 20 m), $f_{20m} = 0.33370452$ m ce qui donne une distance entre piquet de 10,005566 m. Pour une distance de 10m entre goupilles, avec f_{20m} , la longueur de corde devient 19,988861 m et la valeur de flèche calculée 0.333333250 m soit un écart de 0.000372 m.on peut constater que cet écart est très proche de la valeur du terme négligé $\frac{c^4}{128 R^3}$ soit 0.000370 m pour un rayon de 150 m ce qui pourrait

faire penser que la formule $\frac{c^2}{8R}$ est exacte pour une distance entre goupilles de 10 m, ce n'est qu'une coïncidence pour R 150 (voir ANNEXE 1 p 50)

7.4 Dévers pratiques ou prescrits

$$d_{p(mm)} = \frac{1000 C}{R} = 0.02 C f_{(mm)}$$
 (Bornes hallades équidistantes de 10 mètres)

Le coefficient C est déterminé de manière empirique.

7.4.1 Coefficient C

L'hétérogénéité des vitesses pratiquées et des types de train circulant sur une même section de ligne à conduit à fixer un dévers pratique inférieur au dévers d'équilibre (impossible à mettre en place pour toutes les vitesses pratiquées) En vue d'homogénéiser les contraintes subies par la voie et la fatigue entre rail bas et rail haut et ainsi d'optimiser l'entretien de celle-ci, la valeur du dévers pratique tient compte de l'importance relative des trafics voyageurs et marchandise et de la dispersion des vitesses pratiquées. Le dévers pratique ou dévers prescrit est calculé au moyen d'un coefficient constant sur la section de ligne considérée, le coefficient « C » (multiple de 15), proportionnellement à la courbure. Celui-ci est adapté en fonction des désordres constatés en voie par l'établissement. Toutefois, une exception à la règle de proportionnalité dévers/courbure et tolérée en passant d'un coefficient de dévers à un autre par un raccordement en dévers établi avec un gauche de 0,5 mm/m.

7.4.1.1 Rappel historique

Avant les années 1930, le surhaussement S est calculé de différentes façons suivant les réseaux :

Sur l'Est,
$$S = \frac{12 V^2}{R}$$
 en donnant à V la valeur $V = 20 + \frac{2 V_i}{3}$
V_i étant la vitesse maximum autorisée.

Au Chemin de fer du Nord, $S = \frac{C}{R}$ C étant un coefficient variable en fonction des lignes ou portions de ligne et de la vitesse des trains qui les parcourent.

C peut prendre les valeurs suivantes : 120 110 100 90 75 60 50 40 30 20 avec $S \le 0.15$ m. on notera que pour les valeurs de C 30, 45, 60, 75 les vitesses respectives sont 50, 60, 70, 80. Peut-être est-ce là la raison d'un coefficient de dévers multiple de 15 ?

Au PLM, à l'origine (dans les années 1928) $S = \frac{V}{R}$ V étant la vitesse maximum autorisée.

Plus tard, quand les vitesses augmentèrent, on réduisit cette valeur d'un tiers pour ne pas trop surcharger les

petits rayons au passage des trains lents et le dévers devint : $S = \frac{2}{3} \frac{V}{R}$

Mais par le fait de l'augmentation constante de la puissance des machines et, par suite, du poids et de la vitesse des trains, l'expérience a montré que, sur les lignes fréquentées par des trains à marche rapides, exposés à subir en courbe des réactions, il y a intérêt à accentuer le dévers afin d'améliorer le confort des voyageurs. Dans ce but il a été mis à l'essai sur les principales lignes à grandes vitesses une nouvelle formule qui donne à partir de 80 km/h environ un dévers supérieur à celui de la formule ci-dessus. Les résultats ayant été satisfaisants elle a été généralisée.

$$V \le 78 \text{ km/h}$$
 $S = \frac{V - 25}{R}$ Jusqu'à 25 km/h les voies seront posées en principe sans dévers $V \le 120 \text{ km/h}$ $S = \frac{1,6 V - 45}{R}$ Cette formule se raccorde à la précédente à la vitesse de 78,333 km/h $S = 2,4 \frac{V - 70}{R}$ Cette formule se raccorde à la précédente à la vitesse de 120 km/h

Sur Paris – Nice, la vitesse fixée pour le calcul du dévers était de 140 km/h sur les parcours ne comportant pas de courbes de rayon inférieur à 1200 m, 130 km/h sur les parcours ne comportant pas de courbes de rayon inférieur à 900 m

Sur Paris – Clermont – Vichy, la vitesse retenue était de 130 km/h sur les parcours ne comportant pas de courbes de rayon inférieur à 900 m

On remarquera qu'à l'époque, il n'est fait aucune mention de l'insuffisance de dévers. Celle-ci calculée avec les limites de l'époque nous donne :

$$\mathring{A} V 130 \text{ km/h}, d = 160 \text{ mm}, R = 900 \text{ m}, I = 61,5 \text{ mm}$$
 $\mathring{A} V 140 \text{ km/h}, d = 140 \text{ mm}, R = 1200 \text{ m}, I = 52,7 \text{ mm}$

Ce qui confirme que l'augmentation des performances du réseau c'est faite par l'augmentation de l'insuffisance de dévers au détriment du confort des voyageurs.

Aujourd'hui, c'est la formule du réseau du Nord qui a été généralisée sur l'ensemble du réseau.

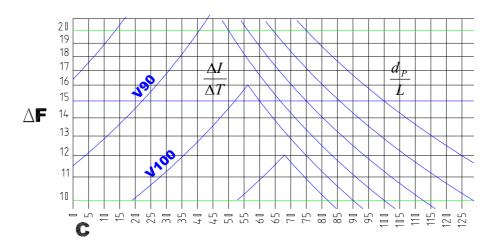


La valeur du coefficient C est notée sur les épures hallades des sections de ligne. Il n'est pas toujours possible de respecter le C indiqué, on cherchera néanmoins à trouver un C unique pour l'ensemble des courbes modifiées lors du remaniement de tracé.

7.4.2 **C** est les variations d'insuffisance et de dévers

Le coefficient C déterminant le dévers prescrit, il conditionne donc l'insuffisance est les gauches réalisés dans les raccordements. Les principales contraintes sont reprises dans le tableau page 14 sous forme de la valeur de la différence entre 2 flèches successives mesurées sur une corde de 20 mètres. En égalisant les écarts de flèche obtenus suivant les contraintes d'insuffisance et de variation de dévers, on obtient les courbes représentant la limite de variation de la flèche en fonction de la vitesse et du coefficient de dévers. Un abaque existe, le « sapin » nom dû à la forme de l'ensemble des courbes représentées (Figure 5 extrait de l'ANNEXE 3 page52).

Figure 5



	Différence de flèche (mm) sur 10 m en fonction de C				
VITESSES	V ≤ 20	0 km/h	$200 \text{ km/h} < \text{V} \le 220 \text{ km/h}$		
LIMITES	NOMINALES EXCEPTIONNELLES		NOMINALES	EXCEPTIONNELLES	
Condition de gauche (mm/m)	$\frac{\Delta d}{L} \leqslant \frac{180}{v}$ $\frac{90000}{C V}$	$\frac{\Delta d}{L} \leqslant \frac{216}{v}$ $\frac{108000}{C V}$	$\frac{\Delta d}{L} \leqslant \frac{180}{v}$ $\frac{90000}{C V}$	$\frac{\Delta d}{L} \leqslant \frac{216}{v}$ $\frac{108000}{C V}$	
Condition de variation d'insuffisance (mm/s²)	$\frac{\Delta I}{\Delta T} \leqslant 75 \text{mm/s}$ $\frac{135000}{0,0118 \text{V}^3 - \text{CV}}$	$\frac{\Delta I}{\Delta T} \leq 90 \text{mm/s}$ $\frac{162000}{0,0118 \text{V}^3 - \text{CV}}$	$\frac{\Delta I}{\Delta T} \leq 50 \text{mm/s}$ $\frac{90000}{0,0118 \text{V}^3 - \text{CV}}$	$\frac{\Delta I}{\Delta T} \leqslant 75 \text{mm/s}$ $\frac{135000}{0,0118 \text{V}^3 - \text{CV}}$	
$C optimum$ $\Delta f_{\frac{\Delta I}{\Delta T}} = \Delta f_{\frac{\Delta d}{\Delta L}}$	0,005619 V ²	0,004720 V ²	0,005900 V ²	0,005244 V ²	

7.4.2.1 Contrainte due au gauche (valeur nominale)

$$\frac{\Delta d_p}{L} \leqslant \frac{180}{V} \Rightarrow \frac{\frac{1000C}{R_2} - \frac{1000C}{R_1}}{L} \leqslant \frac{180}{V} \Rightarrow 1000C \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \le \frac{180L}{V}$$
or $\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{f_2 - f_1}{50000} = \frac{\Delta f}{50000} \Rightarrow \Delta f = \frac{50000 \times 180 \times L}{1000CV} = \frac{90000}{CV}$ avec $L = 10 \text{ m}$

Le calcul est le même pour la valeur exceptionnelle $\frac{216}{V}$.

7.4.2.2 Contrainte due à la variation d'insuffisance

$$\frac{\Delta I}{\Delta T} \leqslant 75 \Rightarrow \left(\frac{11.8 \, V^2 - 1000 \, C}{R_2} - \frac{11.8 \, V^2 - 1000 \, C}{R_1}\right) \frac{V}{3.6 \, L} \leqslant 75$$

$$(11.8 \, V^2 - 1000 \, C) \frac{\Delta f}{50000} \times \frac{V}{3.6 \, L} \leqslant 75 \Rightarrow \Delta f \leqslant \frac{75 \times 50000 \, times L \times 3.6}{11.8 \, V^3 - 1000 \, CV}$$

$$\Delta f \leqslant \frac{135000}{11.8 \, V^3 - 1000 \, CV} \quad \text{pour } L = 10 \, m$$

Le calcul est le même pour les autres valeurs (50, 90)

7.4.2.3 C optimum

Le coefficient C optimum est le coefficient donnant la plus petite longueur de raccordement respectant à la fois la condition de gauche et de variation d'insuffisance. Il se situe à l'intersection des courbes de contrainte d'insuffisance et de variation de dévers (voire Figure 5 p 13.

On obtient sa valeur (pour les valeurs normales) en posant :

$$\frac{90000}{CV} = \frac{135000}{0.0118 \, V^3 - CV} \Rightarrow \frac{135000}{90000} = \frac{0.0118 \, V^3 - CV}{CV} = \frac{0.118 \, V^2}{C} - 1 \Rightarrow \frac{135000}{90000} + 1 = \frac{0.0118 \, V^2}{C}$$

$$\frac{135000 + 90000}{90000} = \frac{0,0118 \, V^2}{C} \Rightarrow C = \frac{90000 \times 0,0118 \, V^2}{135000 + 90000} = 0,00472 \, V^2$$

$$d_{max} \geqslant \frac{C_{max}}{R_{mini}} \text{ or } R_{mini} \geqslant \frac{0,0118 \, V^2}{I_{max} + d_{max}} \Rightarrow d_{max} \geqslant \frac{C_{max} \left(I_{max} + d_{max}\right)}{0,0118 \, V^2}$$

Soit:
$$C_{max} \le \frac{0.0118 V^2 d_{max}}{I_{max} + d_{max}}$$
 ou, avec $I_{max} + d_{max} = 310$, $C_{max} \le 3810^{-6} V^2 d_{max}$

La valeur du C optimum est identique pour les valeurs normales et exceptionnelles de la variation d'insuffisance et du gauche (V \leq 200 km/h) En effet, le rapport respectif entre celles-ci est de 1,2 celui-ci s'éliminant dans les calculs $\left(\frac{90}{75} = \frac{216}{180} = 1,2\right)$

Il est donc facile de déduire la variation de flèche exceptionnelle de la variation de flèche normale (de même pour le gauche) en multipliant celle-ci par 1,2.

Lors de construction nouvelle, on peut choisir C comme suit $\frac{5V^2}{1000} \le C \le \frac{7V^2}{1000}$

C peut également être calculé en fonction des dévers et insuffisances maxi rencontrés sur la zone concernée.

8 Principe de la méthode des flèches

Le tracé des courbes réalisé conformément aux procédés topographiques n'offre pas, dans la pratique, la précision nécessaire pour donner aux files de rails la régularité de courbure indispensable à la circulation aux grandes vitesses.

Sur les lignes où circulent des trains rapides ou express à une vitesse égale ou supérieure à 60 Km/h et sur les autres lignes sur lesquelles la vitesse autorisée est supérieure à 80 Km/h, l'emploi de la méthode des flèches est obligatoire ainsi que l'existence de doucines¹ correctes aux deux extrémités de chaque raccordement.

La correction des courbes par la méthode des flèches nécessite une connaissance suffisante des diagrammes des flèches.

Nous allons donc examiner la forme des diagrammes des flèches et des courbures correspondant à des tracés particuliers. Pour simplifier les figures, nous négligerons le diagramme des dévers puisque nous avons dit que ceux-ci devaient être toujours proportionnels aux flèches.

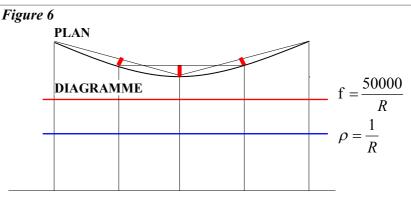
Nous supposons que la demi corde utilisée pour le relevé des flèches sera de 10 m.

8.1 Diagrammes des flèches

8.1.1 Diagramme d'un arc de cercle

Dans un cercle, la courbure est constante. Les flèches relevées sous une même corde sont toutes égales. Le diagramme de la courbure et des flèches sera deux horizontales d'ordonnées respectives :

$$\frac{1}{R}$$
 et $\frac{50000}{R}$



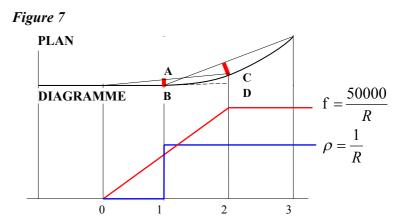
Arrondi du profil en long du rail haut dû à la prise de dévers se retrouvant dans le tracé en plan du fait de la proportionnalité flèches/dévers.

8.1.2 Diagramme d'un cercle tangent à un alignement au droit d'un piquet

Au point 1, origine de l'arc de cercle, la courbure passe de 0 à $\frac{1}{R}$. Au point 1, la flèche AB est sensiblement égale à la moitié de l'ordonnée du cercle au point 2 (CD).

$$f_1 = \frac{DC}{2} = \frac{\frac{x^2}{2R}}{2} = \frac{1}{2} \frac{50000}{R}$$

Soit la moitié de la flèche du cercle.



8.1.3 Diagramme d'un arc de cercle sécant à un alignement au droit d'un piquet

Si le cercle n'est pas tangent à l'alignement au point 1, la tangente au cercle et l'alignement forment un angle obtus; en ce point nous pouvons considérer que le tracé est un cercle dont le rayon théorique est 0 et dont la courbure est infinie. En fait nous aurons au point 0 une courbure très grande.

Par contre, la flèche au piquet 1 est Figure 8 supérieure à la demi-flèche du cercle puisque l'ordonnée du point 2 est supérieure à l'ordonnée correspondante d'un point de l'arc de cercle tangent à

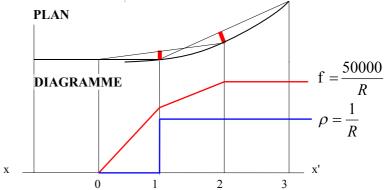
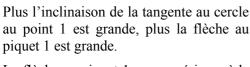
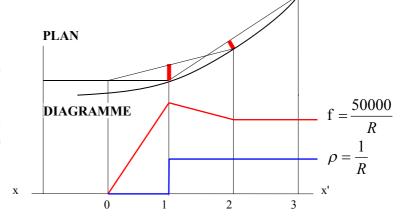


Figure 9



La flèche au piquet 1 sera supérieure à la flèche de l'arc de cercle f, si l'ordonnée du cercle au piquet 2 est supérieure à 2 f.

Ce type de diagramme se rencontre normalement au droit de la pointe d'aiguille d'un appareil de voie (diagramme de la branche déviée).

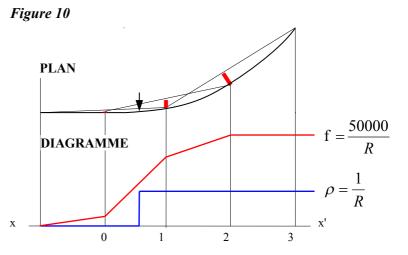


8.1.4 Diagramme d'un arc de cercle tangent à un alignement en un point ne correspondant pas à un piquet

Soit un arc de cercle tangent à l'alignement en un point situé entre les piquets 0 et 1.

La flèche relevée au point 0 sera sensiblement égale à la moitié de l'ordonnée du cercle au piquet 1. Or le piquet 1 a une abscisse inférieure à 10 m. Son ordonnée sera donc inférieure à $\frac{50000}{R}$ et la flèche au piquet 0 inférieure à la demi-flèche du cercle.

Au piquet 1 la flèche sera par contre supérieure à la demi-flèche du cercle $\frac{50000}{R}$ mais inférieure à la flèche du cercle.



8.1.5 Diagramme des flèches d'un raccordement progressif - Flèches de transition

La courbure d'un raccordement parabolique varie linéairement et le diagramme des courbures est une oblique d'ordonnée 0 à l'origine et d'ordonnée $\frac{1}{R}$ en fin de raccordement.

Nous avons vu également que la flèche variait linéairement de 0 à $\frac{50000}{R}$ le graphique des flèches d'un raccordement parabolique devrait se présenter comme indiqué ci-contre.

En réalité la flèche relevée au point d'osculation du raccordement à l'alignement, qui correspond à un point où la courbure est nulle, n'est pas, ellemême nulle. En effet, le cordeau qui sert à mesurer la flèche est situé en

PLAN $\rho = \frac{1}{R}$ DIAGRAMME $x = \frac{1}{R}$

alignement à l'une de ses extrémités et dans le raccordement à l'autre.

De même, la flèche relevée à l'autre extrémité du raccordement, en un point où la courbure est $\frac{1}{R}$, n'a pas la valeur de la flèche de l'arc de cercle du fait qu'une des extrémités du cordeau est située dans le raccordement en un point où la courbure est inférieure à $\frac{1}{R}$

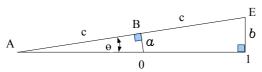
Ces flèches sont appelées « flèches de transition », nous allons en rechercher la valeur relative.

En voie principale, les alignements et les courbes sont raccordés par des raccordements progressifs. Soit un raccordement de longueur 2p dont nous avons tracé le diagramme des courbures.

Nous appellerons 0 le point d'osculation du raccordement et de l'alignement.

Au point 1 d'abscisse c (demi-corde) l'ordonnée du raccordement est $\frac{c^3}{12 pR}$ (équation du raccordement cubique de Nördling)

La flèche relevée au point 0 sera sensiblement égale à la moitié de l'ordonnée au point 1. En effet :



les triangles AB0 et A1E sont semblables et

$$\frac{a}{b} = \frac{A0}{AE} = \frac{c\cos\theta}{2c} \quad \text{or} \quad \theta \quad \text{très petit} \implies \cos\theta \approx 1 \quad \Rightarrow \frac{a}{b} \approx \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad a = \frac{b}{2}$$

Soit
$$f_0 = \frac{c^3}{24 pR}$$

Dans le raccordement les flèches croissent linéairement de f sur une distance de 2 p soit une différence de flèches entre deux points consécutifs distants l'un de l'autre de la valeur c de :

$$D = \frac{f}{2 p} c = \frac{\frac{c^2}{2 R}}{2 p} c = \frac{c^3}{4 pR}$$

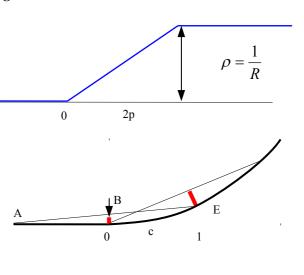
La flèche de transition au point 0, origine du raccordement aura donc une valeur égale au 1/6e de la différence D entre deux flèches consécutives du raccordement (c'est-à-dire de la rampe de flèche). En effet :

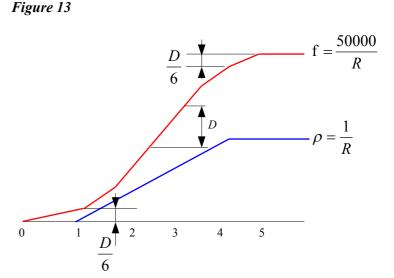
$$\frac{\frac{c^3}{24 pR}}{\frac{c^3}{4 pR}} = \frac{1}{6}$$

De même, la flèche relevée au point d'osculation du raccordement et de l'arc de cercle sera égale à la flèche de l'arc de cercle moins le 1/6, de la différence D entre deux flèches consécutives du raccordement.

D'où le diagramme théorique d'un raccordement parabolique (Figure 13 cicontre).

Figure 12





8.2 Propriété de la méthode

8.2.1 Conséquences du déplacement d'un point de la courbe

Soit une courbe dont on a mesuré les flèches fi, f_2 f_3 , f_4 , en des points 1, 2, 3, 4, sur des cordes croisées de longueur 2c. Si au point 3, par exemple, on ripe la courbe d'une quantité r (ripage) vers le centre de la courbe sans toucher aux points 2 et 4, la corde 2-4 reste fixe et la valeur de la flèche primitive f_3 diminue de r. Les cordes 1-3 et 3-5 viennent en 1-3' et 3'-5 de sorte que les flèches f_2 et f_4 , **augmentent** de la valeur des segments 2'-2" et 4'-4"

On remarque que 2'2" est pratiquement égal à 2'2" à une quantité négligeable près.

Il en est de même de 4'4" et 4'4".

Or,
$$2'2''' = \frac{33'}{2} = 4'4''' = \frac{r}{2}$$

Les flèches f_2 , et f_4 sont donc augmentées de $\frac{R}{2}$, d'où la règle pratique suivante.

Si l'on modifie la valeur d'une flèche, les flèches encadrantes sont modifiées dans le sens contraire d'une quantité égale à la moitié de la modification apportée à la flèche modifiée.

En généralisant, si on apporte un ripage r à une flèche n la valeur des flèches encadrantes deviendra :

$$f'_{n-1} = f_{n-1} - \frac{r_n}{2}$$
 et $f'_{n+1} = f_{n+1} - \frac{r_n}{2}$

8.2.2 Propriétés d'une courbe rectifiée par rapport à la courbe initiale

Soit une courbe T T' encadrée par deux alignements qui la prolongent tangentiellement en T et T'.

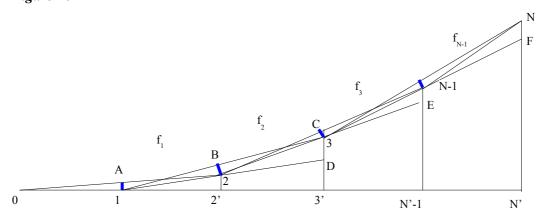
Puisqu'une ligne de chemin de fer ne peut accepter ni **discontinuité**, ni jarret brusque, toute rectification doit être telle que la nouvelle courbe puisse se **raccorder tangentiellement** soit en T et T' soit en des points voisins T, et T', aux deux alignements précités.

Ceci est également valable pour une courbe (ou partie de courbe) quelconque encadrée par deux autres courbes. Nous pouvons donc en conclure que deux conditions sont nécessaires et suffisantes pour que la courbe rectifiée puisse se substituer à la courbe initiale.

- 1. Les points extrêmes de la courbe (ou partie de courbe) rectifiée doivent être situés sur le tracé initial, c'est-à-dire qu'il est impératif d'aboutir à un ripage nul aux extrémités de la courbe (ou partie de courbe) rectifiée.
- 2. La courbe (ou partie de courbe) rectifiée doit être tangente en ses extrémités aux alignements (ou aux parties de courbe non rectifiée) qui l'encadrent, c'est-à-sire que l'angle des tangentes aux deux extrémités de la courbe rectifiée doit conserver sa valeur initiale après rectification.

8.2.3 Relation entre la flèche et l'angle formé par les alignements tangents à la courbe à ses extrémités

Figure 16



Soit une partie de courbe 0, 1, 2, 3, N, les flèches relevées tous les 10 mètres en A, B et C étant f_1 , f_2 , f_3 . Dans les triangles quasi semblables 0A1 et 022' nous avons $\overline{22'} = 2 f_1$

L'angle $\widehat{212} = \frac{2f_1}{10}m(radian)$ (assimilation de l'angle à son sinus)

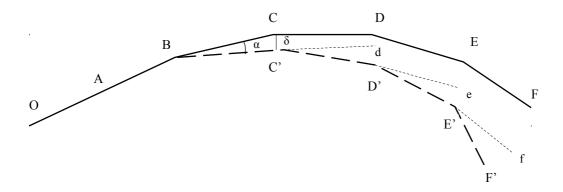
De même, l'angle
$$\widehat{3D2} = \frac{\overline{3D}}{10m} = \frac{2f_2}{10m} (radian)$$

L'angle au centre, somme de n angles adjacents de côtés perpendiculaires à ceux des angles

$$\widehat{212}',\ \widehat{32D},\ \widehat{43E}$$
 , etc. est sensiblement égal à $2\left(\frac{f_1+f_2+...+f_{n-1}}{10}\right)$ radian

8.2.4 Changement d'orientation à l'extrémité d'une courbe

Figure 17



Considérons une courbe A B C D E F dans laquelle nous procéderons à une modification de flèche sans toucher à l'alignement O A B de la tangente à l'origine.

Si nous faisons tourner la courbe autour du point B en déplaçant le point C en C' (CC' = δ) L'orientation de BC' sera modifiée par rapport à celle de BC de l'angle $\alpha = \frac{\delta}{10} radian$

De même les segments C'D', D'E', E'F' formeront avec C'd, D'e, E'f, parallèles à CD, DE et EF, un angle $\alpha = \frac{\delta}{10} radian$

On démontrerait de même que si d'autres points étaient déplacés le changement d'orientation serait proportionnel à la somme algébrique des déplacements.

En appelant « variations de flèches » les différences d de valeur : flèches corrigées moins flèches anciennes, nous pouvons dire que, par suite des ripages, le changement d'orientation de la tangente à une courbe au droit du repère de rang n est proportionnel à la somme algébrique des n premières variations de flèches appelée aussi cumulée première.

8.2.5 Conséquences

Dans toute étude de rectification de courbe, il faudra, pour remplir la deuxième condition énoncée au § 8.2.4 ci-avant (angle des tangentes aux extrémités inchangé) que :

la somme des flèches soit constante ou que la somme algébrique des variations de flèches soit nulle.

$$\sum f = constante$$
 ou $\sum \delta = 0$

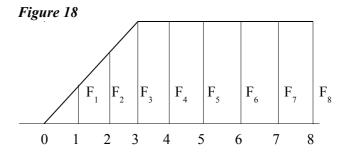
8.2.6 Corollaire

Si nous considérons un diagramme de flèches, nous constatons que la surface du diagramme est égale à

$$10 m \left(\frac{f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \frac{f_2 + f_3}{2} + \dots \right)$$

Soit $10 m(f_1 + f_2 + f_3 + ...)$

La somme des flèches étant inchangée après rectification nous pouvons conclure en disant qu'après rectification.

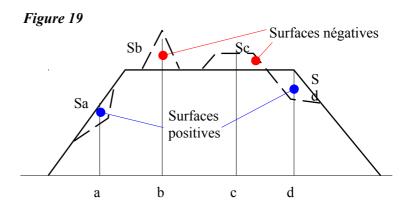


La surface du diagramme doit être inchangée

Soient Sa, Sb, Sc, Sd, les surfaces déterminées par les tracés des diagrammes des flèches : nouvelles et anciennes. Ces surfaces sont à compter algébriquement, le changement de signe se faisant par rapport au contour du diagramme initial.

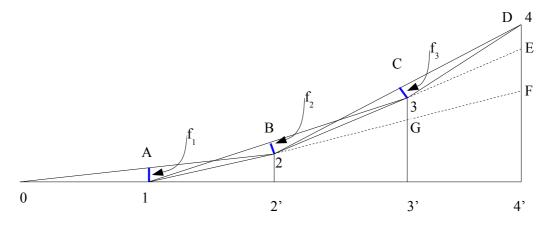
Nous devons avoir:

$$Sa + Sb + Sc Sd = 0$$



8.2.7 Détermination approximative de l'ordonnée d'un point d'une courbe définie par son diagramme des flèches

Figure 20



Soit une partie de courbe 0, 1, 2, 3, 4, les flèches relevées en A, B, C étant f1, f2, f3

Nous constatons à l'examen des triangles quasi-semblables :

OA1 et
$$O$$
 22' que $\overline{22'}$ = $2f_1$ 122' et $1F$ 4' que $\overline{F4'}$ = $6f_1$ (3×2 f_1) (3×2 f_2) car $\overline{3G}$ = $2f_2$ L'ordonnée du point 4 est $\overline{44'}$ = $6f_1$ + $4f_2$ + $2f_3$ 2 C 3 et 24 E que $\overline{4E}$ = $2f_3$

et en règle générale : $Y_n = 2[(n-1)f_1 + (n-2)f_2 + ... + 2f_{n-2} + f_{n-1}]$

8.2.7.1 Détermination de la valeur du ripage en un point

Soit une courbe à rectifier dont l'ordonnée approximative en un point d'abscisse n est

$$2[(n-1)f_1 + (n-2)f_2 + ... + 2f_{n-2} + f_{n-1}]$$

Les variations apportées aux flèches f_1 , f_2 , f_3 , ... étant d_1 , d_2 , d_3 , etc., l'ordonnée du point n deviendra :

$$2[(n-1)(f_1+d_1)+(n-2)(f_2+d_2)+...+2(f_{n-2}+d_{n-2})+f_{n-1}+d_{n-1}]$$

Le ripage en n est la différence entre les deux ordonnées déterminées ci-dessus soit :

$$2[(n-1)d_1+(n-2)d_2+...+2d_{n-2}+d_{n-1}]$$

D'où, en appelant cumulée seconde la somme des produits des variations de flèches par leur distance au point considéré (nous appellerons aussi cette somme : somme des moments par rapport au point n) :

Le ripage en un point s'obtient en doublant la cumulée seconde en ce point

8.2.7.2 Conséquences

Nous avons indiqué au § 8.2.2 que dans toute étude de rectification de courbe il était nécessaire qu'il n'y ait pas de ripage au dernier point de la courbe rectifiée.

Cette condition sera remplie si:

la cumulée seconde à l'extrémité de la courbe est nulle.

8.2.7.3 Corollaire

Figure 21 F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_{n-1} $F_n=0$ 0 1 2 3 4 5 6 n-2 n-1 n

L'abscisse et l'ordonnée du centre de gravité d'un système A sont donnés par les formules suivantes :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{A}$$
 $y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{A}$ avec $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$

Si nous considérons un diagramme de flèche, et si nous donnons à chaque flèche un poids proportionnel à sa longueur, nous constatons que l'abscisse du centre de gravité de l'ensemble par rapport à l'extrémité du diagramme (point n) est égale à :

$$x_c = 10_{(m)} \frac{(n-1)f_1 + (n-2)f_2 + \dots + f_{n-1}}{f_1 + f_2 + \dots + f_n}$$

Les variations apportées aux flèches étant d₁, d₂, ..., d_n, comme ci-avant, cette abscisse devient

$$x_{c}^{'}=10_{(m)}\frac{(n-1)(f_{1}+d_{1})+(n-2)(f_{2}+d_{2})+\ldots+f_{n-1}+d_{n-1}}{Somme\ des\ flèches} \quad \text{or la somme\ des\ flèches\ doit\ rester\ inchangée}$$

La différence $x_c^{'} - x_c$ est égale à :

$$10_{(m)} \frac{(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \ldots + d_{n-1}}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{Somme\ des\ momments\ par\ rapport\ au\ point\ n}{Somme\ des\ flèches}$$

Le numérateur devant être nul (§ 8.2.7.2 p 22), nous pouvons conclure en disant qu'après rectification :

La projection du centre de gravité doit être inchangée

8.2.7.4 Sens des ripages

Il résulte des deux règles suivantes

Règle 1 : En principe, les flèches relatives à une courbe dont le centre est situé à droite d'un observateur se déplaçant dans le sens du kilométrage sont positives. Elles sont négatives si le centre est à gauche de cet observateur.

Cette règle est impérative pour des courbes successives de sens contraire.

Règle 2 : Le ripage en un point s'obtient en doublant la cumulée seconde en ce point.

Par conséquent :

Tout ripage positif d au piquet n correspond à une cumulée seconde positive. Il résulte d'une augmentation d/2 de la valeur algébrique des flèches aux piquets n – 1 et n + 1 et d'une réduction d de la valeur algébrique de la flèche au piquet n (tableau ci-contre).

•	Piquet	Flèche ancienne	Flèche nouvelle	Différenc e	Cumulée première	Cumulée seconde	Ripage
	n-1	f_{n-1}	$f_{n-1} + d/2$	+d/2			
	n	fn	fn - d	-d	+d/2	+d/2	d
	n + 1	f_{n+1}	$f_n + d/2$	+d/2	-d/2	0	0
					0		

La réduction d de la valeur algébrique de la flèche au piquet n'entraîne un déplacement de la courbe vers son centre si la flèche est positive, et un déplacement à l'opposé de son centre si la flèche est négative,

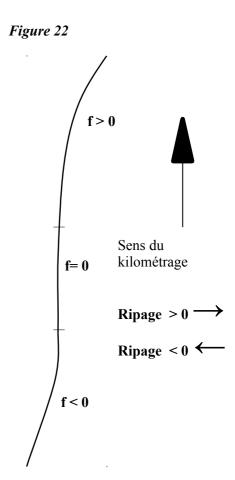
Dans les deux cas, ce déplacement se fait vers la droite dans le sens du kilométrage.

Donc:

Tout ripage vers la droite dans le sens du kilométrage est positif.

Inversement, tout ripage vers la gauche dans le sens du kilométrage est négatif.

On remarquera que le signe des ripages est lié uniquement à la notion de droite et gauche par rapport au sens de kilométrage. Il est indépendant du sens des courbes mais implique le respect du signe des flèches qui en résulte.



Cas particuliers

Lorsque la règle 1 ci-avant (qui n'est pas toujours impérative) n'est pas appliquée, il importe, afin d'éviter toute confusion, de bien préciser sur les documents d'exécution les conventions de signes adoptées pour les flèches et pour les ripages.

Par exemple, pour l'application de la « méthode des trois points », qui ne fait généralement intervenir qu'un nombre réduit de flèches appartenant à une même courbe il est habituellement convenu de considérer comme positifs les ripages vers l'extérieur de la courbe ceux qui augmentent les flèches) et comme négatifs les ripages vers l'intérieur de la courbe ceux qui diminuent les flèches).

D'autre part, certains appareils « ME-DI-CO » indiquent des ripages de même signe que la variation de flèche au piquet correspondant, ce qui représente une convention de signe inverse de la règle normale.

8.2.8 Application des propriétés des diagrammes des flèches à l'étude des rectifications des courbes

8.2.8.1 Tableau des calculs

Le tableau des calculs ci-dessous permet de déterminer de façon simple :

- les cumulées premières,
- les cumulées secondes,
- les ripages.

N° des piquets	Flèches existantes	Flèches nouvelles	Variations de flèches	Cumulées premières	Cumulées secondes	Ripages
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
1	\mathbf{f}_1	f '1	$f'_1 - f_1 = d_1$		0	0
2	\mathbf{f}_2	f'2	$f'_2 - f_2 = d_2$	$+$ $d_1 + d_2 + d_1 + d_2$	+ d ₁	2d ₁
3	f_3	f'3	$f'_3 - f_3 = d_3$		$2d_1 + d_2$	$2(2d_1+d_2)$
4	${ m f_4}$		$f'_4 - f_4 = d_4$	$d_1 + d_2 + d_3$		$2 (3d_1 + d_2 + d_3)$
				$d_1 + d_2 + d_3 + d_4$		
5	f_5	f'5	$\mathbf{f'}_5 - \mathbf{f}_5 = \mathbf{d}_5$	$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5$	$4d_1 + 3d_2 + 2d_3 + d_4$	etc.
				u ₂ u ₃ u ₄ · u ₃	$5d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 2d_4 + d_5$	

¹ On remarquera que cette convention de signe, qui est commode dans les cas concernant une portion de voie appartenant à une même courbe et dont les flèches peuvent être considérées comme toutes positives, devient insuffisante lorsque la longueur à traiter comporte deux courbes de sens contraire (donc avec des flèches positives et négatives) ou un alignement entre deux courbes (le sens des ripages destinés à rétablir l'alignement ne serait pas défini, alors qu'avec la notion de ripage à droite et ripage à gauche il est parfaitement défini).

On peut cependant utiliser cette convention de signe lorsque la voie à traiter comporte une seule courbe et une partie d'alignement; il suffit de faire correspondre le sens des ripages dans la partie théoriquement en alignement à celui de la courbe adjacente.

Il y a lieu de bien observer :

- 1. La façon de calculer la différence des flèches : flèche nouvelle flèche existante.
- 2. Le décalage des cumulées premières (1/2 intervalle) par rapport aux variations de flèches.
- 3. Le décalage (1/2 intervalle) des cumulées secondes par rapport aux cumulées premières.

Pour mener à bien une rectification de courbes il faudra que les dernières indications portées dans les colonnes 5, 6 et 7 soient nulles gage de se raccorder sur (colonne 6) et tangent à la direction de raccord (colonne 5).

8.2.8.2 Modification d'une flèche, répercussion sur l'épure – Généralisation.

Nous allons établir un tableau de calculs en modifiant de d la valeur d'une flèche, au point 2 Par *exemple,

N° des piquets	Flèches existantes	Flèches nouvelles	Variations de flèches	Cumulées premières	Cumulées secondes	Ripages
0	0	0	0			
1	\mathbf{f}_1	\mathbf{f}_1	0		0	0
2	f_2	$f_2 + d$	d	1	0	0
3	f_3	f3	0	d	d	2d
4	f_4	f4	0	d	2d	4d
5	f_5	f5	0	d	3d	6d
6	f_6	f6	0	d	4d	8d

On constate que la modification d'une flèche entraîne un accroissement rapide des cumulées secondes et des ripages.

En règle générale, la modification d'une valeur d d'une flèche de rang n entraîne une cumulée première égale à d dans la suite des calculs. Cette modification entraîne au point p une cumulée seconde égale à (p - n) d'et un ripage égal à 2 (p - n) d dont le signe est celui de d.

8.2.8.3 Application d'un « Couple » sur deux flèches - Généralisation

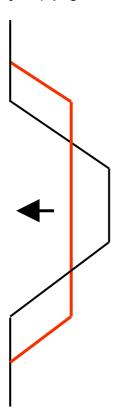
Nous établirons un nouveau tableau de calculs en augmentant la valeur de la flèche au point 2 d'une valeur d et en diminuant la valeur de la flèche au point 5 d'une valeur d.

N° des piquets	Flèches existantes	Flèches nouvelles	Variations de flèches	Cumulées premières	Cumulées secondes	Ripages
0	0	0	0		0	0
_			_	0		_
1	\mathbf{f}_1	\mathbf{f}_1	0	_	0	0
_				0	_	_
2	f_2	$f_2 + d$	+ d	_	0	0
_			_	d	_	
3	f_3	f_3	0		d	2d
				d		
4	f_4	f_4	0		2d	4d
_			_	d		
5	f_5	$f_5 \cdot d$	- d	_	3d	6d
			_	0		
6	f_6	f_6	0.	_	3d	6d
				0		

8.2.9 Exemples de cas pratiques

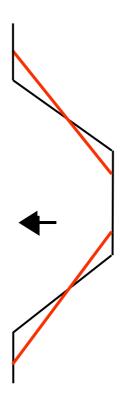
(Ripages positifs intérieur courbe)

8.2.9.1 Augmenter un rayon (ripages intérieurs courbe)



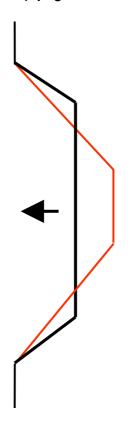
Correctifs	Σ	ΣΣ
+a	+a	
-2a		+a
	-a	
+a		0
	0	
		0

8.2.9.2 Allonger deux RP (ripages intérieurs courbe)



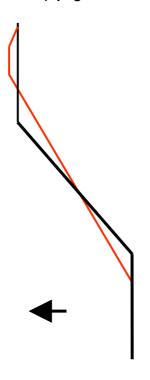
Correctifs	Σ	ΣΣ
+a		
	+a	
-a		+ a
	0	
-a		+a
	-a	
+a		0
	0	
		0

8.2.9.3 Allonger deux RP (ripages extérieurs courbe)

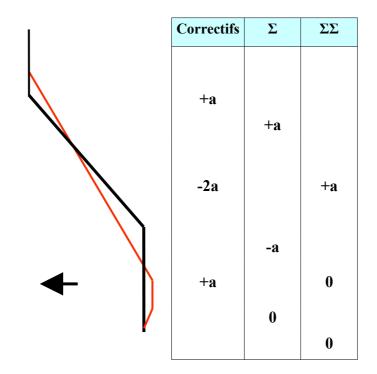


Correctifs	Σ	$\Sigma\Sigma$
Correctiis	4	
-a	-a	
+2a		-a
-a	+a	0
	0	0

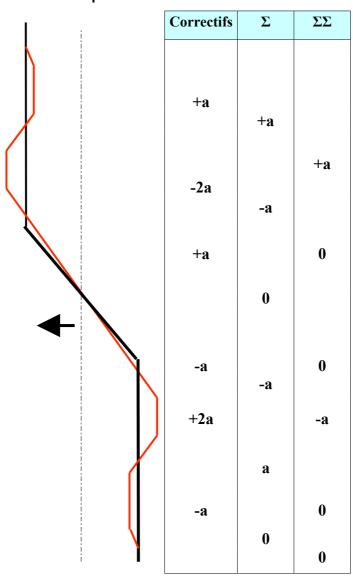
8.2.9.4 Allonger un seul RP (ripages extérieurs courbe)



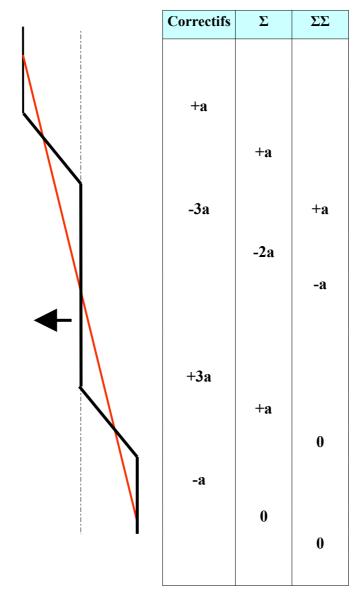
Correctifs	Σ	$\Sigma\Sigma$
-a	-a	
+2a		-a
	+a	
-a		0
	0	
		0



8.2.9.5 Allonger les deux RP d'un point d'inflexion



8.2.9.6 Créer un point d'inflexion



8.2.9.7 Généralisation

Si l'on souhaite introduire un correctif « +a » à un piquet, on pourra considérer ce correctif comme :

Le « haut » d'un groupe	Le « centre »d'un groupe	Le « bas » d'un groupe
+a	-a	
	-a	+ a
-2a	+4a	-a
•••	-a	-a
+a	-a	+ a

8.3 Les doucines

8.3.1 Normes à respecter dans les doucines

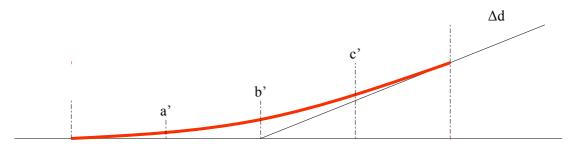
Quand un essieu aborde un RP, il pivote instantanément, sa roue extérieure s'élevant par rapport à l'autre roue du fait de la prise de dévers. La caisse est soumise à des oscillations qui s'amortissent dans le raccordement. L'accélération verticale subie est de la forme :

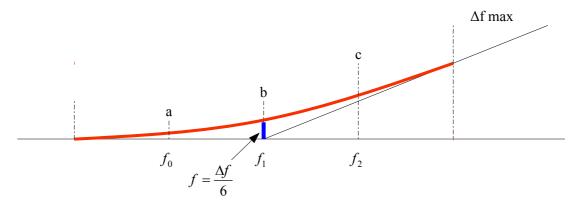
$$\gamma_V = \left(\frac{V}{3.6}\right)^2 \frac{1}{R} \, m/s^2$$

On s'est donc imposé un raccordement « en doucines » dans le diagramme des dévers, en vue d'amortir l'amplitude des oscillations.

Cette modification de diagramme théorique des dévers remet en cause la relation dévers / courbure, on a donc adopté également des doucines dans le diagramme des flèches. La variation de la courbure n'est plus linéaire dans celles-ci.

Figure 23





En pratique, à la suite de constatations expérimentales, il suffira de réaliser :

$$a'+b'+c' \ge \frac{\Delta d \max}{3}$$
 soit, pour le diagramme des flèches $a+b+c > \frac{\Delta f \max}{3}$

 f_0 passant de 0 à a f_1 passant de $\Delta f/6$ à b (voir 8.1.5 p 17) f_2 passant de f_2 à f_2 + c

Les doucines de dévers seront déduites des doucines de tracé par la relation $d=0.02\,Cf$ venant elle-même du calcul du dévers pratique $d=\frac{1000\,C}{R}$ avec $R=\frac{50000}{f}$

Pour des doucines de 40 mètres, on peut essayer les valeurs suivantes pour a, b, c :

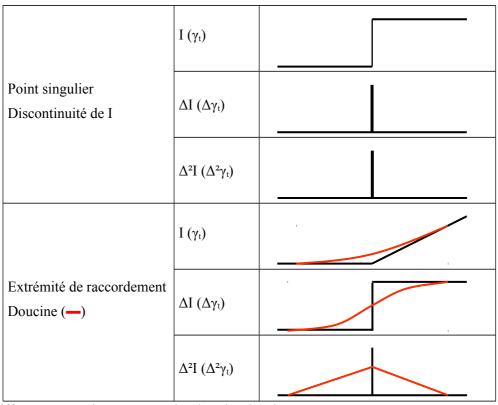
$$a+b+c=9>\Delta \frac{f}{3}=5$$
 ce qui vérifie la condition $a+b+c>\Delta \frac{f}{3}$ en effet, $a+b+c=\Delta f$

Pour des doucines de 30 mètres : $a \le \frac{\Delta f}{4}$ arrondi au $\frac{1}{2}$ mm inférieur, b=a

8.3.1.1 Analyse des doucines

Les modifications apportées aux flèches ne doivent pas entraı̂ner d'accélérations parasites dans le raccordement en plan au niveau des efforts transversaux. Ceux-ci sont directement proportionnels à l'insuffisance de dévers ($\gamma_t = I/153$) et aux variations de celle-ci.

La variation des différences de flèches ainsi que la variation de cette variation (proportionnelle à γ_t) doivent suivre une loi de progression adaptée, croissante puis décroissante.



Calcul des différences premières et secondes dans les doucines

Borne s	Flèches	ď'	d"	Σd"
		0	c c	
0	0		$ \mathbf{f}_1 $	$ \mathbf{f}_1 $
		\mathbf{f}_1	t Jt	
1	\mathbf{f}_1		$f_2 - 2f_1$	$f_1 + f_2 - 2f_1 = f_2 - f_1$
		$f_2 - f_1$	$f_3 - 2f_2 + f_1$	
2	f_2		$1_3 - 21_2 + 1_1$	$f_2 - f_1 + f_3 - 2f_2 + f_1$ ou $f_3 - f_2$
		f_3 - f_2		
			$f_4 - 2f_3 + f_2$	
3	f_3			$f_3 - f_2 + f_4 - 2f_3 + f_2$ ou $f_4 - f_3$ soit Δf_{max}
4	f_4	$f_4 - f_3 = \Delta f_{\text{max}}$		

En un point quelconque:

$$d_{n}^{"}=2\left(\frac{f_{n+1}+f_{n-1}}{2}-f_{n}\right) \text{ et } \sum d^{"}=\Delta f_{max}$$

Calculs théoriques :

Soit à calculer, théoriquement les flèches x, y, z d'une doucine connaissant la première flèche du RP et sa variation Δf

Flèches	ď'	ď"		
0				
0	0	0		
0	0	x	α	
x	x	(y - x) - x	2α	(A)
у	y - x	(z - y) - (y - x) (f - z) - (z - y)	3α	(B)
z	z - y	(f - z) - (z - y)	2α	
f	f - z	$\Delta f - (f - z)$	α	(C)
$f + \Delta f$	Δf			
$f + 2\Delta f$	Δf			
		Σd " = Δf	$\Sigma d'' = \Delta f = 9\alpha$	

 $x = \alpha$

(A)
$$\Rightarrow (y-x)-x=2 \alpha \Rightarrow y=4 \alpha (en effet, x=\alpha)$$

(B)
$$\Rightarrow (z-y)-(y-x)=3 \alpha \Rightarrow z=10 \alpha$$

(C)
$$\Rightarrow \Delta f - (f - z) = \alpha \Rightarrow \Delta f - f + 10\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{f - \Delta f}{9}$$
 et $\alpha = \frac{\Delta f}{9} = \sum d''$

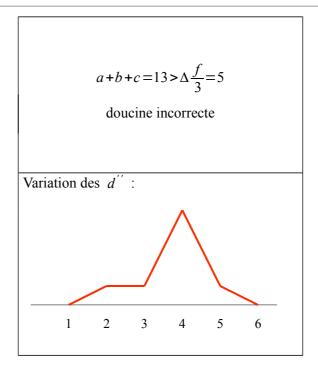
Nota : on vérifie aisément que $a+b+c \ge \Delta \frac{f}{3}$ en effet x=a b=y $c=z-\Delta f$

En remplaçant la valeur en α des flèches x, y, z par la valeur en Δf :

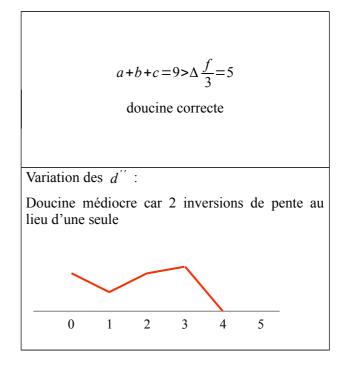
$$\frac{\Delta f}{9} + \frac{4\Delta f}{9} + \frac{10\Delta f}{9} - \Delta f = \frac{6\Delta f}{9} = \frac{2\Delta f}{3} \geqslant \frac{\Delta f}{3}$$

8.3.2 Exemples numériques

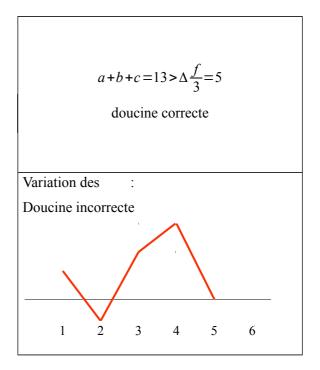
N	f	ď'	d"	
0	0	0	0	
1	0	2	2	a=0
2	2	4	2	b=2
3	6	14	10	c=2
4	20	16	2	Σ=4
5	36	16	0	
6	52	16	0	
7	68			



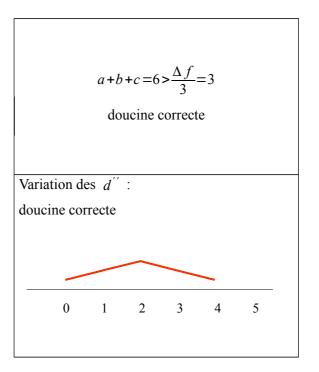
N	1	f	ď'	d"	
0	l	0	4	4	
1		4	6	2	a=0
2		10	10	4	b=4
3		20	15	5	c=5
4		35	15	0	Σ=9
5		50	15	0	
6		65	15	0	
7		80	13		



N	f	ď'	d"	
0	0	1		
1	1	4	3	a=1
2	5	2	-2	b=5
3	7	7	5	c=7
4	14	15	8	Σ=13
5	29	15	0	
6	44	15	0	
7	59			



N	f	ď,	ď"	
0	0	1	1	
1	1	3	2	a=1
2	4	6	3	b=4
3	10	8	2	c=1
4	18	9	1	Σ=6
5	27	9	0	
6	36	9	0	
7	45			



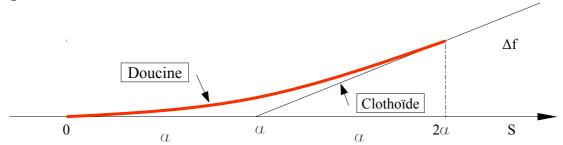
8.3.3 Considérations théoriques sur les doucines, études des raccordements de M. Henri PERROT (1983)

L'accélération verticale est donnée par la formule: $\gamma_v = \left(\frac{V}{3,6}\right)^2 \frac{1}{R} = \frac{V \, \varepsilon}{96 \, a} \, m/s^2$ avec a demi longueur de la doucine, $\varepsilon = 1$ valeur normale et 1,2 pour $\frac{216}{V}$, V vitesse en km/h, R rayon du raccordement cylindrique en mètres, D dévers, L longueur du raccordement.

En effet:

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{\left(1 + d^{'2}\right)^{\frac{3}{2}}}{d^{''}} \text{ or } (1 + d^{'2})^{\frac{3}{2}} \text{ ne s'écarte jamais de 1 de manière significative et } d^{''} = \frac{3D}{4a^3} (2as - s^2) \Rightarrow R = \frac{4aL}{3D}$$
en $s = a$, $L = \frac{DV}{0.18\epsilon} \Rightarrow R = \frac{aV}{0.135\epsilon}$

Figure 24



Si on ajuste les doucines (raccordement sinus) pour que γv ne dépasse pas 0,045 g au niveau du contact rail roue, c'est-à-dire la même valeur que pour un raccordement cylindrique mais sur une seule file de rail on peut déterminer la longueur minimum de la demi doucine : $\frac{V \epsilon}{96 a} = 0,045 \, gk \Rightarrow a = \frac{V \epsilon}{42.38 \, k}$

k < 1 coefficient permettant de transformer l'inégalité en égalité, ϵ voir ci-dessus.

La longueur minimale de la doucine pour V 300 km/h = 14,16 m

V 160 km/h = 7,56 m

V 80 km/h = 2.76 m

On peut comparer les caractéristiques de la clothoïde simple avec celle avec doucines

Au point s = 0 pour la clothoïde simple correspondant au point s = a pour la doucine

$$\Delta y = \frac{a^3}{96 LR} = \frac{V^3 \varepsilon^3}{7.310^6 k^3 LR} (m)$$

Au point s = a pour la clothoïde simple correspondant au point s = 2a pour la doucine

$$\Delta y = \frac{4 a^3}{15 LR} - \frac{a^3}{6 LR} = \frac{a^3}{10 LR} = \frac{V^3 \varepsilon^3}{7.6 \times 10^5 k^3 LR} (m)$$

On peut considérer que la doucine en plan n'a aucune signification pratique si $\Delta y < 0.001\,$ m. Cette condition est réalisée pour toutes les caractéristiques de raccordement actuellement usité à la SNCF (gauche = 180 ϵ /V R de 75 à 7000 m) si k > 0.33 ϵ

La longueur de doucine doit donc être telle que :

$$\frac{V \varepsilon}{42,38} \le 2 a \le \frac{V}{14}$$
 (14=42,38×0,33)

On constate que pour la vitesse de 160 km/h, une longueur de doucine de 20 m est suffisante.

Le dévers est en coïncidence parfaite entre les points s = 2a et S = L du raccordement composite et les points s = a et S = L - a de la clothoïde. L'écart maximal se situe au milieu de la doucine (origine et fin de la clothoïde) il est égal à :

$$\Delta d = \frac{3 a D_{(m)}}{16 L}(m)$$
 avec L la longueur du raccordement et D le dévers dans la courbe

soit avec
$$a = \frac{V \varepsilon}{42,38}$$
 et $L = \frac{DV}{0,18\varepsilon} \Rightarrow \frac{3 dD}{16 L} = \frac{3}{16} \times \frac{V \varepsilon}{42,38} \times \frac{0.18\varepsilon}{V} = 00008 \varepsilon^2 mm$

soit avec
$$a = \frac{V \varepsilon}{14}$$
 et $L = \frac{DV}{0.18\varepsilon} \Rightarrow \frac{3 dD}{16L} = \frac{3}{16} \times \frac{V \varepsilon}{14} \times \frac{0.18\varepsilon}{V} = 0.0024\varepsilon^2 mm$

la valeur arrondie à 2 mm au milieu de la doucine convient à tous les cas de figures et correspond à des doucines de dévers avec accélération verticale $de0,018g\epsilon^2$ et dont la longueur serait V/8,4 ϵ (19,04 ϵ à 160 km/h)



Le tracé géométrique en plan des raccordements fait abstraction des doucines, leur introduction lors des études d'exécution par la méthode des flèches peut engendrer des ripages non négligeables (voir l'exemple § 8.3.4 page 38) en terme de gabarit ou raidir les rampes de flèches et de dévers (attention aux limites)

il y aura lieu de bien analyser, au cas par cas, l'opportunité d'une rectification des flèches obtenues par mesurage sur la vue en plan (Autocad) avec introduction des doucines. La méthode de restitution d'épures en coordonnée cartésiennes § 9.3 page 45 prend toute sa valeur pour reporter su le plan le tracé ainsi obtenu.

8.3.4 Introduction de doucines en conservant la rampe de flèche :

On remarquera les ripages introduits par les doucines de l'ordre de 100 mm dans cet exemple.

N° Diquet	Flèches actuelles	Flèches	Δf	ΣΔf	ΣΣ Δf	Ripages
Piquet 1	0	futures 1	1	1		
2	2	5	3	4	0	
3	12	13	1	5	1	10
4	24	24	0	5	5	20
					10	
5	36	36	0	5	15	30
6	48	48	0	5	20	40
7	60	60	0	5	25	50
8	72	72	0	5	30	60
9	84	84	0	5	35	70
10	96	96	0	5	40	80
11	108	107	-1	4	45	90
12	118	115	-3	1	49	98
13	120	119	-1	0	50	100
14	120	119	-1	-1	50	100
15	118	115	-3	-4	49	98
16	108	107	-1	-5	45	90
17	96	96	0	-5	40	80
18	84	84	0	-5	35	70
19	72	72	0	-5	30	60
20	60	60	0	-5	25	50
21	48	48	0	-5	20	40
22	36	36	0	-5	15	30
23	24	24	0	-5	10	20
24	12	13	1	-4	5	10
25	2	5	3	-1	1	2
26	0	1	1	0	0	0
27	0	0	0			

9 Compléments

9.1 Amélioration de la trajectoire du centre de gravité en courbe

Cette méthode est intéressante lors de l'étude de points singuliers où, par exemple, il est matériellement impossible de respecter strictement la proportionnalité dévers / flèche.

9.1.1 Principe

On peut considérer, par approximation, que le centre de gravité d'une voiture de type classique se situe à 1,50 m au-dessus du plan de roulement, donc à une hauteur du même ordre de grandeur que l'écartement de la voie. On peut donc admettre que le déplacement du centre de gravité G de cette voiture se déplace coté intérieur courbe d'une valeur sensiblement égale au dévers.

Il est donc aisé de reconstituer la courbe (G) lieu géométrique de G à partir de la courbe connue (C), elle-même parallèle à la courbe (R) lieu géométrique des repères. Disposant des flèches de (G) on peut en corriger les défauts et matérialiser ces corrections en intervenant sur les repères.

Figure 25

G ≈d

Constante

R

d

C

9.1.2 Méthode

- 1) Rectifier la courbe (R) par la méthode habituelle
- 2) En déduire les flèches de la projection verticale de la trajectoire de G. cela revient à s'imposer au droit de chaque repère un ripage fictif vers l'intérieur de la courbe égale au dévers pratique. Ce ripage imposé fixe la C' (d/2) à retenir à chaque repère ; des C' ainsi définies on tire les C' intermédiaires, puis les correctifs qu'il aurait fallu utiliser pour passer de la courbe réelle à la courbe fictive. À leur tour, ces correctifs fournissent immédiatement les flèches de la courbe fictive par rapprochement avec les flèches réelles initiales. Il s'agit de la démarche inverse de celle pratiquée habituellement.
- 3) Améliorer, par les méthodes habituelles, le tracé ainsi calculé de la trajectoire de G rarement satisfaisant.
- 4) Affecter le tracé initial de la voie des ripages ainsi obtenus en 3, et en déduire les nouvelles flèches réelles à adopter. Le dévers initialement adopter est bien sûr à conserver.

Voir l'exemple numérique page 40

9.	1.3	Exer	nple de	e ca	alcul									Ordre des opérations	
2	3		1			7	6	5	4	8			9		
			<u> </u>			le		ées			Étı	ide de (C	; ')		
Dévers calculé d=1,8f	Dévers adopté	N° des repères	première étudeFlèches initiales de (C)		d'et d' verification doucines	Flèches de (G), courbe fictive initiale	Correctifs imposés artir de la colonne 8	∞ de la colonne 9Cumulée 1 ^{ere} imposées	Cumulée 2 ^{ème} imposées (chiffres col 2)/2	Flèches de (G') courbe fictive rectifiée (col. 6 - 11)	T Correctifs	Cumulées premières	Cumulées secondes	Ripages permettant de réaliser (G') à partir de (G)	Flèches d éfinitives de (C) (colonne 4 + colonne 11)
1	L	0	4		<u> </u>	O	1	0	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	0	0		1	+1			1	0				0
1,8	2	2	1	1	3	3,5	+2,5	+1	+1	3	-0,5	0	0	0	0,5
9	9	3	5	4	1	6	+1	+3,5	+4,5	6,5	+0,5	-0,5	-0,5	-1	5,5
18	18	4	10	5	1	11	+1	+4,5	+9	11	0	0	-0,5	-1	10
28,8	29	5	16	6	0	16	0	+5,5	+14,5	16	0	0	-0,5	-1	16
39,6	40	6	22	6	0	21,5	-0,5	+5,5	+20	21	-0,5	0	-0,5	-1	21,5
50,4	50	7	18	6	0	28,5	+0,5	+5	+25	27	-1,5	-0,5	-1	-2	26 ,5
61,2	61	8	34	6	-1	33	-1	+5,5	+30,5	33	0	-2	-3	-6	34
70,2	70	9	39	5	-2	37,5	-1,5	+4,5	+35	38,5	+1	-2	-5	-10	40
75,6	76	1 0	42	3	-1	40,5	-1,5	+3	+38	42,5	+2	-1	-6	-12	44
79,2	79	1	44	2	-2	42,5	-1,5	+1,5	+39,5	43,5	+1	+1,5	-5	-10	45
79,2		1 2	44	0	0	44	0	0	+39,5	43,5	-0,5	+2	+5	-6	43,5
79,2		1 3	44	0	0	44	0	0	+39,5	43,5	-0,5	+1,5	-1,5	-3	43,5
79,2		1 4	44	0	0	44	0	0	+39,5	43,5	-0,5	+1	-0,5	-1	43,5
80		1 5	45			45	0	0	+39,5	44,5	-0,5	+0,5	0	0	44,5
								0				0			

9.2 Dédoublement de voie

9.2.1 Principes

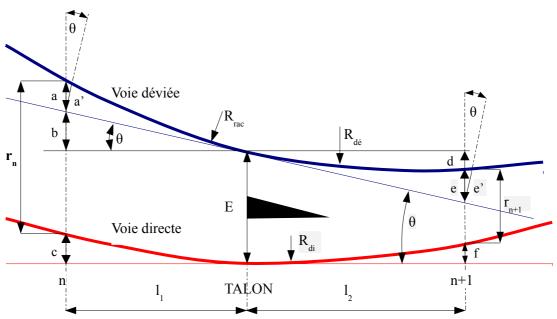
L'idée consiste à positionner la voie de dédoublement par rapport à la voie directe comme si l'on ripait celleci pour la mettre en place sur le tracé de la future voie de dédoublement. Les ripages ainsi calculés correspondront en fait à l'entre axe des 2 voies.

La méthode des flèches, se prêtant particulièrement bien à la maîtrise des ripages, est tout indiquée dans les cas difficiles (nombreux obstacles, gabarit, etc.)

9.2.2 Méthode

Connaissant le type d'appareil, on calcul l'entre axe aux bornes encadrant le talon en considérant le tracé de la branche déviée en sortie de talon. L'entre axe trouvé correspond au ripage qu'il faudrait réaliser sur la voie

Figure 26



directe pour l'amener sur le tracé de la voie déviée.

Calcul au repère n :

$$r_n = E + \varepsilon c + b + \mu a$$

E entraxe au talon

 ε =+1 si appareil CEX ou -1 si appareil CIN

 $\mu = \pm 1$ en fonction du tracé par rapport au talon de la branche déviée

$$a = a' \cos \theta \quad a' = \frac{\left(\frac{l_1}{\cos \theta}\right)^2}{2 R_{rac}} = \frac{l_1^2}{2 R_{rac} \cos^2 \theta} \qquad b = l_1 t g \theta \qquad c = \frac{l_1^2}{2 R_{di}}$$

$$r_n = E + \varepsilon \frac{l_1^2}{2 R_{di}} + l_1^2 t g \theta + \mu \frac{l_1^2}{2 R_{rac} \cos \theta}$$



Les 2 bornes peuvent être dans l'appareil, le principe de calcul reste identique. Il est indispensable de faire un schéma pour les conduire

Calcul au repère n+1:

$$r_{n+1} = E + \varepsilon f - d + \mu e$$

E entraxe au talon

 $\varepsilon = +1$ si appareil CEX ou -1 si appareil CIN

 $\mu = \pm 1$ en fonction du tracé par rapport au talon de la branche déviée

$$e = e' \cos \theta \quad e' = \frac{\left(\frac{l_2}{\cos \theta}\right)^2}{2 R_{d\acute{e}}} = \frac{l_2^2}{2 R_{d\acute{e}} \cos^2 \theta} \qquad b = l_2 t g \theta \qquad c = \frac{l_2^2}{2 R_{d\acute{e}}}$$

$$r_{n+1} = E + \varepsilon \frac{l_2^2}{2 R_{d\acute{e}}} + l_2^2 t g \theta + \mu \frac{l_2^2}{2 R_{d\acute{e}} \cos \theta}$$

Tableau des flèches correspondant

Les ripages seront affectés du signe conventionnellement admis pour l'étude. En principe, les ripages seront positifs s'ils sont dirigés coté intérieur courbe pour une courbe à droite dans le sens de la ligne.

Ripages positifs:

N° repère	f voie directe	f _d voie dédoublée	Δf	ΣΔf	ΣΣΔf	Entre axe	Observation s
n	$f_n = \frac{50000}{R_{di}}$	$f_{dn} = \frac{50000}{R_{d\acute{e}}}$	$f_{dn}-f_n$	$\boxed{-\left \frac{r_n}{2} - \frac{r_{n+1}}{2}\right }$	$\frac{r_n}{2}$	r_n	
n+1	$f_{n+1} = \frac{50000}{R_{di}}$	$f_{dn+1} = \frac{50000}{R_{rac}}$	$f_{dn+1} - f_n$		$\frac{r_{n+1}}{2}$	r_{n+1}	
					•••		
n+i					1810	3620	Ente axe future des 2 voies

Ripages négatifs:

N° repère	f voie directe	f _d voie dédoublée	Δf	ΣΔf	ΣΣΔf	Entre axe	Observation s
n	$f_n = \frac{50000}{R_{di}}$	$f_{dn} = \frac{50000}{R_{d\acute{e}}}$	$f_{dn} - f_n$	$+ \left \frac{r_n}{2} - \frac{r_{n+1}}{2} \right $	$-\frac{r_n}{2}$	r_n	
n+1	$f_n = \frac{50000}{R_{di}}$	$f_{dn} = \frac{50000}{R_{rac}}$	$f_{dn+1} - f_{n+1}$		$-\frac{r_{n+1}}{2}$	r_{n+1}	

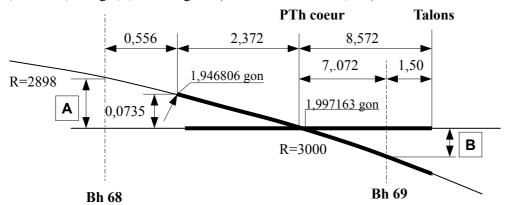
9.2.3 Exemple numérique

(Les Laumes - remplacement de la communication V1/V1bis (aiguille 103)

9.2.3.1 Schéma

Appareil de voie 0,034 modèle 71

A =0,0735 + 0,556 tg 1,1,946806 gon - (ordonnée R 2898 à 0,556)



A = 0.0735 + 0.01701 - 0.000053

A = 90,457 mm soit sur l'axe : 90,457 - 1435 = -1345

 $B = 7,072 \text{ tg } 1,1,997163 \text{ gon} + (\text{ordonn\'ee } R3000 \text{ à } 7,0272 / \cos 1,997163)$

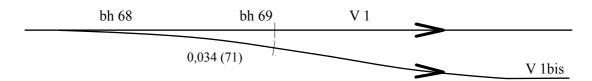
B = 0.22193 + 0.00834

B = 230,27 mm soit sur l'axe : -230,27 - 1435 = -1665

Entre axe à la borne hallade n° 68 : 1345 soit un ripage de 672,5

Entre axe à la borne hallade n° 69 : 1665 soit un ripage de 832,5

9.2.3.2 Plan de situation



9.2.3.3 Tableau des flèches

Voire page suivante

La flèche de 25 au droit de la borne 69 correspond à la flèche de la branche déviée après cintrage de l'appareil, $f_{\text{déviée CEX}} = f_{\text{directe}} + f_{\text{déviée alignement}}$ soit $\frac{50000}{3000} + \left(-\frac{50000}{1205}\right)$ soit 16,66-41,5=-24,8 suivant

les conventions de signes habituelles. Les rayons de la voie directe et de la voie déviée sont donc de même sens.

La rampe de flèche du raccordement n'est pas formidable puisque le 1^{er} Δf est de 14,5 tandis que les suivants de 8.

On notera avec intérêt que le cintrage de l'appareil ne change pas les entre axes entre la voie déviée et directe (heureusement!), on peut donc les calculer sur l'appareil en alignement.

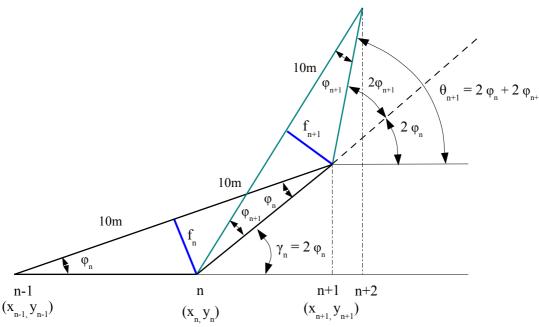
Repère	f lèches V1	flèches V1bis	Δf	ΣΔf	ΣΣΔf	Entre axes V1/V1bis
68	41,5			-160	-672,5	1345
69	41,5	25	-16,5	-176,5	-832,5	1665
70	41,5	39,5	-2	-178,5	-1009	2018
71	41,5	47,5	+6	-172,5	-1187,5	2375
72	41,5	55,5	+14	-158,5	-1360	2720
73	41,5	63,5	+22	-136,5	-1518,5	3037
74	41,5	69	+27,5	-109	-1665	3330
75	41,5	69	+27,5	-81,5	-1764	3528
76	41,5	69	+27,5	-54	-1845,5	3691
77	41,5	69	+27,5	-26,5	-1899,5	3799
78	41,5	63,5	+22	-4,5	-1926	3852
79	41,5	55	+13,5	+9	-1930,5	3861
80	41,5	46,5	+5	+14	-1921,5	3843
81	41,5	39,5	-2	+12	-1907,5	3815
82	41,5	39,5	-2	+10	-1895,5	3791
83	41,5	39,5	-2	+8	-1885,5	3771
84	41,5	39,5	-2	+6	-1877,5	3755
85	41,5	39,5	-2	+4	-1871,5	3743
86	41,5	39,5	-2	+2	-1867,5	3735
87	41,5	39,5	-2	0	-1865,5	3731
88	41,5	42	+0,5	+0,5	-1865,5	3731
89	46	45,5	-0,5	0	-1865	3731
90	50	50	0			3730
91	52	52	0			3730
92	52	52 /	0			

9.3 Restitution en plan (coordonnées x, y)

Il est parfois utile de pouvoir représenter une épure en plan par des coordonnées x et y lorsqu'il n'existe pas de levé topographique fiable de la voie ou pour implanter l'axe de celle-ci en tenant compte des doucines (sur plan ou sur le terrain).

9.3.1 Calcul des coordonnées

Figure 28



$$\varphi_{n \, (radian)} = arctg\left(\frac{f_{n(m)}}{10}\right) \qquad \gamma_n = \pi - (\pi - 2 \, \varphi_n) = 2 \, \varphi_n$$

soit au repère n :

$$x_n = x_{n-1} + 10\cos\left(\sum_{1}^{n} 2\arctan\left(\frac{f_{n(m)}}{10}\right)\right)$$
 et $y_n = y_{n-1} + 10\sin\left(\sum_{1}^{n} 2\arctan\left(\frac{f_{n(m)}}{10}\right)\right)$

Soit les repères $x_1, x_2, x_3, \dots, x_i$ et les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots \theta_i$ associés

$$\begin{array}{lllll} x_{\text{-}1} = x_0 & \text{et} & y_{\text{-}1} = y_0 \\ x_1 = x_0 + 10 \cos \theta_1 & \text{et} & y_1 = y_0 + 10 \sin \theta_1 \\ x_2 = x_1 + 10 \cos \theta_2 & \text{et} & y_2 = y_1 + 10 \sin \theta_2 \\ x_3 = x_2 + 10 \cos \theta_3 & \text{et} & y_3 = y_2 + 10 \sin \theta_3 \\ \dots & \text{et} & \dots & \dots \end{array}$$

 $x_i = x_{i-1} + 10 \cos \theta_i$ et $y_i = y_{i-1} + 10 \sin \theta_i$

Si l'on remplace x_i par sa valeur précédemment calculée on obtient :

$$\begin{split} &x_i=x_0+10\,\cos\,\theta_1+10\,\cos\,\theta_2+10\,\cos\,\theta_3+\ldots+10\,\cos\,\theta_i\,soit: x_i=x_0+10\,\Sigma\,\cos\,\theta_i\\ &\text{de même: }\theta_i=2\phi_1+2\phi_2+2\phi_3+\ldots+2\phi_{i-1}+2\phi_i=\Sigma\;2\;\phi_i=2\;\Sigma\;\phi_i \ \ \Rightarrow \ \ x_i=x_0+10\;\Sigma\;\cos(2\;\Sigma\;\phi_i) \end{split}$$

On calcule de la même façon la valeur de l'ordonnée : $y_i = y_0 + 10 \Sigma \sin(2 \Sigma \phi_i)$

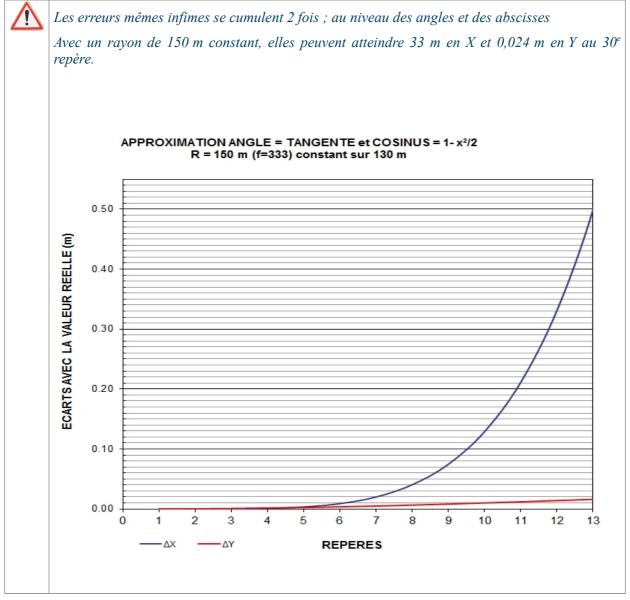
D'ou
$$x_i = x_0 + \sum_{1}^{i} 10 \cos \left(2 \sum_{1}^{i} arctg \left(\frac{f_{i(m)}}{10} \right) \right)$$
 et $y_i = y_0 + \sum_{1}^{i} 10 \sin \left(2 \sum_{1}^{i} arctg \left(\frac{f_{i(m)}}{10} \right) \right)$

Ces calculs peuvent être aisément effectués au moyen de tableur informatique comme Excel. .On trouve d'autres formules plus anciennes simplifiant les calculs en assimilant l'angle à sa tangente et en prenant les 2 premiers termes du développement limité de cosinus(x).

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1^n) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ce qui donne pour le calcul des coordonnées :

$$x_{i} = x_{0} + \sum_{1}^{i} 10 \left[1 - \frac{2 \sum_{1}^{i} \left(\frac{f_{i(m)}}{10} \right)^{2}}{2} \right] \quad \text{et} \quad y_{i} = y_{0} + \sum_{1}^{i} 10 \left[2 \sum_{1}^{i} \left(\frac{f_{i(m)}}{10} \right) + \frac{2 \sum_{1}^{i} \left(\frac{f_{i(m)}}{10} \right)^{3}}{6} \right]$$



Le programme METHAL de rectification des courbes par la méthode des flèches comprend une fonction effectuant ces calculs.

Exemple de formules pour Excel:

N° repère	f (mm)	φ (radian)	2φ	Σφ	X (m)	Y (m)
1	0	0	=2*LC(-1)	0	10	0
2	2	=ATAN(LC(-1)/10000)	=2*LC(-1)	=L(-1)C+LC(-1)	=L(-1)C+10*COS(LC(-1))	=L(-1)C+10*SIN(LC(-2))
3	8	=ATAN(LC(-1)/10000)	=2*LC(-1)	=L(-1)C+LC(-1)	=L(-1)C+10*COS(LC(-1))	=L(-1)C+10*SIN(LC(-2))
4	18	=ATAN(LC(-1)/10000)	=2*LC(-1)	=L(-1)C+LC(-1)	=L(-1)C+10*COS(LC(-1))	=L(-1)C+10*SIN(LC(-2))
		•••		•••		

Où L = ligne, C = colonne, l'adressage étant relatif à la cellule contenant la formule.

Exemple de calcul :

N° Piquet	Flèches (mm)	φ (radian)	2φ	Σφ	Xn (m)	Yn (m)
1	333	0	0,0000	0	10,000	0
2	333	0,0333	0,0666	0,0666	19,978	0,665
3	333	0,0333	0,0666	0,1332	29,889	1,993
4	333	0,0333	0,0666	0,1997	39,691	3,977
5	333	0,0333	0,0666	0,2663	49,338	6,609
6	333	0,0333	0,0666	0,3329	58,789	9,876
7	333	0,0333	0,0666	0,3995	68,002	13,765
8	333	0,0333	0,0666	0,4660	76,935	18,259
9	333	0,0333	0,0666	0,5326	85,550	23,336
10	333	0,0333	0,0666	0,5992	93,808	28,976
11	333	0,0333	0,0666	0,6658	101,673	35,153
12	333	0,0333	0,0666	0,7323	109,109	41,839
13	333	0,0333	0,0666	0,7989	116,084	49,005
14	333	0,0333	0,0666	0,8655	122,567	56,619
15	333	0,0333	0,0666	0,9321	128,529	64,647
16	333	0,0333	0,0666	0,9986	133,943	73,054
17	333	0,0333	0,0666	1,0652	138,786	81,803
18	333	0,0333	0,0666	1,1318	143,037	90,855
19	333	0,0333	0,0666	1,1984	146,676	100,169
20	333	0,0333	0,0666	1,2649	149,687	109,705
21	333	0,0333	0,0666	1,3315	152,057	119,420
22	333	0,0333	0,0666	1,3981	153,776	129,272
23	333	0,0333	0,0666	1,4647	154,835	139,215
24	333	0,0333	0,0666	1,5312	155,230	149,208
25	333	0,0333	0,0666	1,5978	154,960	159,204
26	333	0,0333	0,0666	1,6644	154,026	169,160
27	333	0,0333	0,0666	1,7310	152,431	179,032
28	333	0,0333	0,0666	1,7975	150,183	188,776
29	333	0,0333	0,0666	1,8641	147,292	198,349
30	333	0,0333	0,0666	1,9307	143,770	207,708

10 Conséquences sur les zones en LRS

10.1 Influence des flèches et des ripages.

Si les modifications de tracé nécessitent des ripages systématiques sur des longueurs de plusieurs dizaines de mètres, il y aura lieu de libérer ou d'homogénéiser les contraintes dans les LRS suivant les préconisations des textes réglementaires en vigueur.

Si la zone ripée n'intéresse que la zone centrale des LRS (plus de 150 m des extrémités) :

soit:

f (mm) la flèche sur un cordeau de 20 m

r (mm) les ripages comptés positivement vers l'extérieur de la courbe, négativement vers l'intérieur.

L (m) une longueur

- 1. comprenant la zone ripée,
- 2. ne se rapprochant pas de plus de 150 m des extrémités du LRS,
- 3. ne dépassant pas la longueur susceptible d'être homogénéisée en une seule fois compte tenu des intervalles dont on dispose

n le nombre de repères fixes compris dans la longueur L ($n = \frac{L}{10}$)

Rechercher une longueur L telle que : $\left|\sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}\right| \le 2500 n$

Si cette longueur existe¹, effectuer une homogénéisation des contraintes sur cette longueur L lorsque la voie est stabilisée. la température de référence n'est pas modifiée.

Si, sur la plus grande longueur L répondant aux 3 conditions, on a : $\left|\sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}\right| > 2500 \, n$

Il faut:

- Dans le cas de LRS de moins de 500 m libérer complètement
- Dans le cas de LRS de plus de 500 m, en opérant à une température suffisamment basse, ajouter ou enlever dans le milieu de la longueur L une longueur Δl de méthal, calculée suivant la formule suivante :

$$\Delta l = \frac{2}{1000} \sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}$$
 si $\Delta l > 0$ ajouter du métal

C'est, bien entendu, toujours le cas en alignement (f=0) et le plus souvent en courbe de grand rayon.

10.2 Analyse mathématique

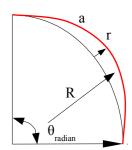
Soient r les ripages en chaque point comptés positivement vers l'extérieur de la courbe et R les rayons de courbure en ces points. La longueur d'un arc est donnée par la formule $a=R\theta_{(radian)}$

Soit u l'allongement d'un élément après ripage r,

$$u=R\theta-(R-r)\theta = \theta(R-(R-r)) = r\theta$$
 or $\theta=\frac{a}{R}$ donc $u=\frac{ar}{R}$

Soit un élément infinitésimal dθ de longueur d'arc ds :

$$ds = Rd\theta$$
 et par suite, $du = \frac{rds}{R}$



Sur une longueur L, l'allongement total sera :

$$U = \int_{0}^{L} \left(\frac{r}{R}\right) ds$$

soit la variation de température de référence provoquant la même dilatation :

$$U = L \alpha \Delta tr = \int_{0}^{L} \left(\frac{r}{R}\right) ds \Rightarrow \Delta tr = \frac{1}{L \alpha} \int_{0}^{L} \left(\frac{r}{R}\right) ds$$

 $\alpha \approx 1.10^{-5}$ (coefficient de dilatation de l'acier à rail) si $\Delta tr \leq 5$ ° on admettra que la température neutre n'a pas changé (5° avant la canicule)

dans le cas contraire,
$$\left| \frac{U}{\alpha L} \right| > 2.6^{\circ}$$

pour que la correction ne soit pas illusoire, il faut U>10 mm

d'ou
$$|U| > 2.6 \alpha L > 1010^{-3} m \implies L > \frac{1010^{-3}}{2.6 \alpha L} \implies L > 299 m$$
 soit 300 m (200 m avant canicule)

On peut exprimer le rayon par sa flèche au milieu d'un cordeau de 20 m pour des repères équidistants de 10 m:

$$\Delta tr = \frac{1}{\alpha L} \int_{0}^{L} r_{(m)} f_{(m)} ds = \frac{1}{50 \alpha L} \int_{0}^{L} r_{(m)} f_{(m)} ds = \frac{1}{50 \times 1,15 \cdot 10^{-5} \times 10 \times n} \sum_{1}^{n} r_{(m)} f_{(m)}$$

$$\Delta tr = \frac{1}{575 \cdot 10^{-5} \times 10 \times n} \sum_{1}^{n} r_{(m)} f_{(m)} \Rightarrow \Delta tr = \frac{1000 \times 1000}{575 \cdot 10^{-5} \times 10 \times n} \sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}$$

$$\Delta tr = \frac{1}{575 \times n} \sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}$$

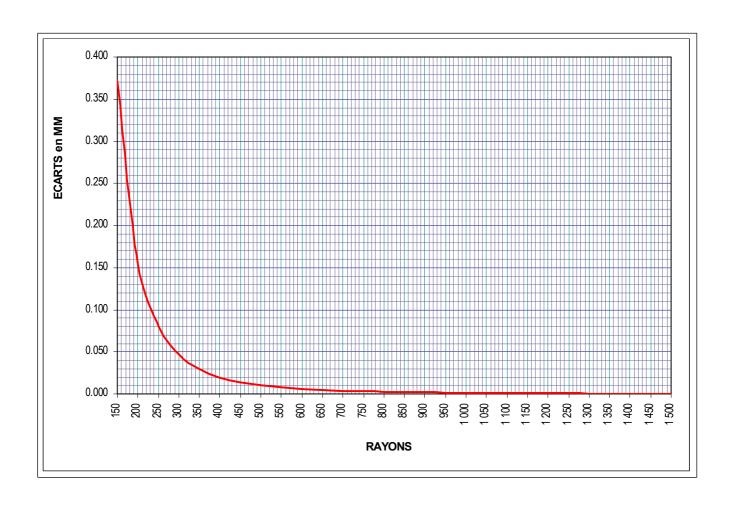
Or
$$|\Delta tr| = \leq 2.6^{\circ} \Rightarrow \frac{1}{575 \times n} \sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)} \leq 2.6^{\circ} \Rightarrow |\sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}| \leq 1500 \times n$$

De même, la longueur de fer à ajouter ou enlever devient :

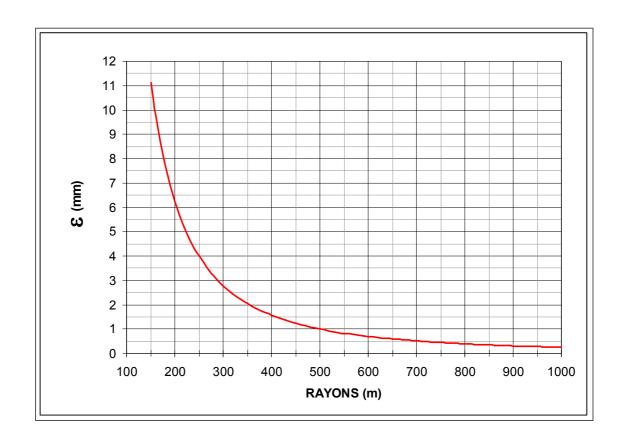
$$U_{(mm)} = \frac{\sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}}{1000 \times 50 \times 1000} \Rightarrow U_{(mm)} = \frac{\sum_{1}^{n} r_{(mm)} f_{(mm)}}{5000}$$

ANNEXE 1

Écart entre la flèche est sa valeur par la formule approchée



Variation & de la longueur de la corde en fonction du rayon pour une équidistance de piquet de 10 m



ANNEXE 3 Sapin (valeurs normales)

PRI DJ EG le 18/11/2002

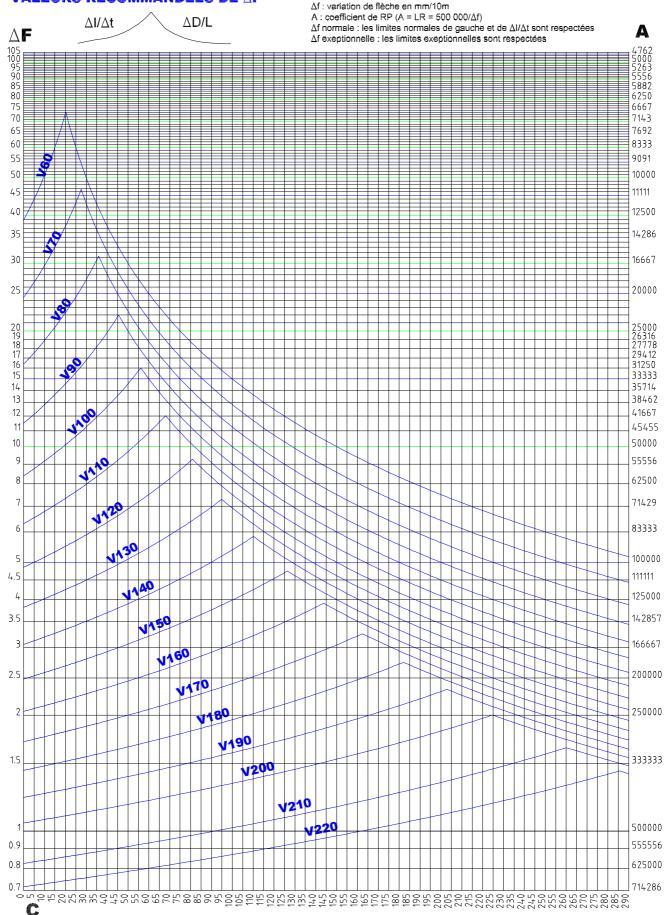
 $\Delta I/\Delta t < 55$ mm/s et $\Delta D/\Delta L < 180/V$

02/00

DETERMINATION DE V, C, \triangle F OU A VALEURS RECOMMANDEES DE \triangle F

V : vitesse en km/h

C : coefficient de dévers



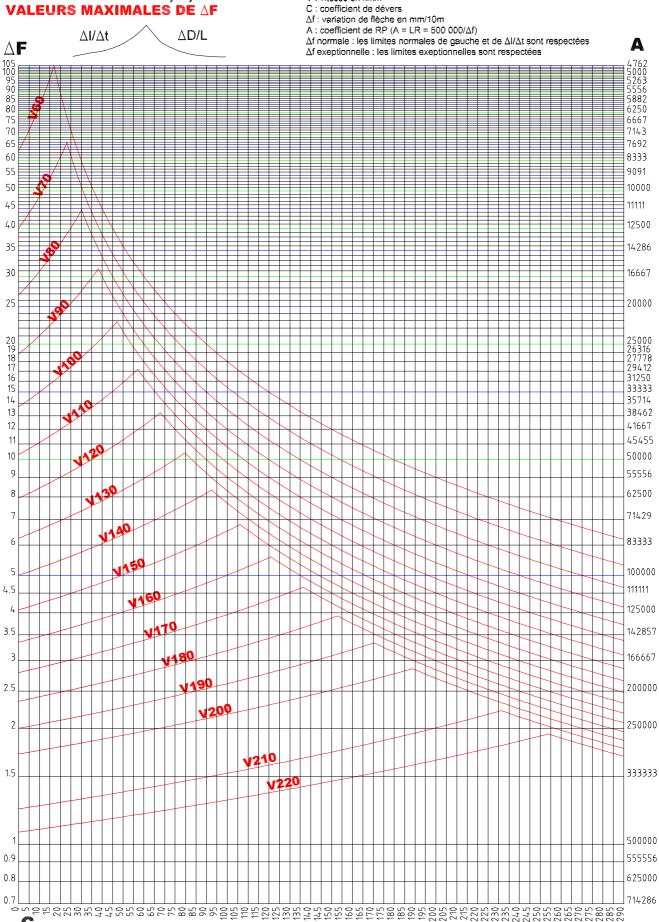
Sapin (valeurs exceptionnelles)

 $\Delta I/\Delta t < 90$ mm/s et $\Delta D/\Delta L < 216/V$

DETERMINATION DE V, C, AF OU A

V : vitesse en km/h

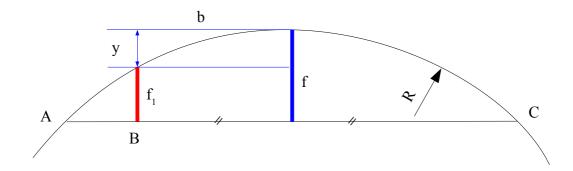
PRI DJ EG le 18/11/2002



ANNEXE 4

Position de la flèche quelconque sur la corde

$$f_{1(mm)} = \frac{AB_{(m)} \times BC_{(m)} \times 1000}{2R_{(m)}}$$



$$f_1 = f - y$$
 $f = \frac{AC^2}{8R}$ $b = \frac{AC}{2} - AB$ et $y = \frac{b^2}{2R} \Rightarrow f_1 = \frac{AC^2}{8R} - \frac{b^2}{2R} = \frac{AC^2 - 4b^2}{8R} = \frac{(AC + 2b)(Ac - 2b)}{8R}$

En remplaçant b par sa valeur :

$$f_{1} = \frac{\left(AC + \frac{2AC}{2} - 2AB\right)\left(AC - \frac{2AC}{2} + 2AB\right)}{8R} = \frac{(2AC - 2AB)2AB}{8R} = \frac{4AB(AC - AB)}{8R} = \frac{AB \times BC}{2R}$$

11 Bibliographie

- « Nouvelle méthode de raccordement des courbes » par M. E. HALLADE, RGF¹ 31ème année 1er semestre avril 1908 n° 4
- V-693 « Dévers à donner aux voies principales Raccordements des courbes entre elles et avec les alignements droits – Rectification des courbes déformées » Chemins de fer de Paris à Lyon et à la Méditerranée Service de la Voie 1928
- « COURBES des CHEMINS DE FER » conférence par M. CHAPPELET année 1930 1931
- « Le raccordement parfait » par M. A. CAQUOT, RGF 68^{ème} année janvier 49 n°1
- « PERFECTIONNEMENT DE DESSINATEURS VOIE » 1 Formulaire voie 2 Les Flèches M. FORTIN janvier 1971
- « RECTIFICATION DU TRACE DES COURBES » mémento didactique école Nationale de Nanterre M. PLOUDRE 1983
- « Les raccordements de courbure et de dévers dans le tracé des voies de chemin de fer, étude globale du problème » par M. H. PERROT 1983
- NG EF 1 C 33 n°1 annexe 9

¹ Revue Générale des Chemins de Fer

Fiche d'identification

Approbation

Rédacteur fonction	Date - visa	Vérificateur fonction	Date - visa	Approbateur fonction	Date - visa
Yves NOBLET		Yves NOBLET		Yves NOBLET	

Historique des versions

Version	Date de version	Nature des modifications
Version 01	5/08/2001	
Version 02	20/04/2004	Compléments théoriques divers
Version 03	12/04/2017	Support de cours autoentreprise

Résumé

Ce document présente la théorie des flèches et son application à la modification de tracé de voie.

Références

Yves NOBLET

Cadre Équipement de Direction Hors classe honoraire Ingénierie SNCF

2013	Consultant Spécialiste en infrastructures ferroviaires
2010-2012	SNCF Direction Régionale de DIJON – Chef de Projets Pôle Ingénierie
2001-2009	SNCF Direction Régionale de DIJON – Responsable du groupe Études Générales et voie
1997-2001	SNCF Direction Régionale de DIJON – Adjoint Chef de Groupe Études Générales et Voie
1979-1997	SNCF Direction Régionale de DIJON – Projeteur puis Cadre Études Voies et Aménagements
1976-1979	SNCF Direction Régionale de Strasbourg - Dessinateur Études Générales et Voies